Investigações em Geometria na Sala de Aula[1]

Paulo Abrantes

A ideia de que aprender Matemática é essencialmente *fazer* Matemática — uma perspectiva sublinhada, nos últimos 10 anos, em numerosos documentos programáticos (por exemplo, nas *Normas* do NCTM (1991)) — tem contribuído para trazer para o primeiro plano o papel que as actividades de natureza exploratória e investigativa podem desempenhar nas aulas e no currículo de Matemática, em todos os níveis escolares.

Diversos autores e investigadores da área da Educação Matemática têm sublinhado a importância de se atribuir, na escola, um papel central ao objectivo de "pensar matematicamente", sustentando que um contributo decisivo pode vir da realização de actividades que envolvem os alunos em problemas abertos e em explorações e investigações matemáticas. Com efeito, estas lidam com processos fundamentais da actividade e do pensamento matemático, como formular problemas, fazer e demonstrar conjecturas ou comunicar descobertas (vejam-se, por exemplo, os artigos de J. Mason, P. Ernest ou A. Schoenfeld, traduzidos em Abrantes et al., 1996).

Em 1995, um grupo de investigadores e de professores dos ensinos básico e secundário começou a desenvolver, no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, um projecto em torno da realização de investigações matemáticas na sala de aula. O projecto assumiu duas vertentes interligadas:

- *Desenvolvimento curricular*. Um objectivo central era a concepção, experimentação e avaliação de propostas de trabalho para as aulas de Matemática, em turmas dos 2º e 3º ciclos do ensino básico e do ensino secundário, susceptíveis de proporcionar o envolvimento dos alunos em actividades de natureza exploratória e investigativa. O processo deu origem a sucessivas versões de materiais para a sala de aula, incluindo tarefas para os alunos e sugestões metodológicas para os professores, que foram sendo testadas, analisadas e reformuladas.
- *Investigação educacional*. Nesta vertente, diversas questões chave relativas à preparação e condução de aulas de Matemática foram identificadas e estudadas. As questões dizem respeito a três problemáticas essenciais: (a) a

dinâmica de uma aula de Matemática centrada na realização de investigações pelos alunos; (b) o conhecimento e as competências profissionais requeridas ao professor quando prepara e conduz aulas deste tipo; e (c) os modos de integração curricular deste tipo de trabalho e os problemas que surgem quando se procura promover uma tal integração.

O desenvolvimento do trabalho em qualquer destas duas vertentes requeria que as tarefas a preparar para a sala de aula tivessem em conta o currículo oficial e os programas de Matemática para os diversos anos de escolaridade. A ideia nunca foi realizar experiências de tipo laboratorial mas sim desenvolver actividades susceptíveis de ser naturalmente integradas no trabalho que o professor realiza a partir dos objectivos e unidades didácticas do programa que deve gerir.

Os dados essenciais foram recolhidos através da observação de aulas em que as tarefas foram experimentadas. Tipicamente, este processo dava origem a dois relatórios, elaborados pelo próprio professor e por um observador. Numa primeira fase, ambos eram membros da equipa do projecto. Mais tarde, outros professores foram convidados a utilizar os materiais nas suas aulas. A análise das aulas era tomada como base para a elaboração de versões melhoradas das propostas de trabalho destinadas aos alunos assim como de sugestões metodológicas dirigidas aos professores.

Por outro lado, à medida que o projecto foi evoluindo, a experimentação de tarefas de natureza investigativa numa aula, ou numa pequena sequência de aulas, foi dando lugar à prática de utilização mais sistemática de um conjunto de tarefas em diversas turmas, normalmente associadas ao desenvolvimento de unidades do currículo. Esta evolução tem a ver com o interesse do projecto em estudar aspectos ligados às competências profissionais do professor e aos ambientes de aprendizagem. Neste sentido, pode dizer-se que a ênfase se foi deslocando das tarefas, tomadas isoladamente, para as questões da integração curricular de um determinado modo de trabalhar em Matemática.

Para reforçar a preocupação de integração curricular, e ainda por razões de ordem prática, a equipa do projecto organizou-se em três subgrupos temáticos, dedicados respectivamente aos números e regularidades, às funções e gráficos e à geometria.

O presente texto procura fazer um balanço de alguns aspectos mais salientes do trabalho realizado pelo grupo de geometria do projecto. Depois de uma breve discussão sobre a importância e o papel que as actividades de natureza investigativa desempenham na aprendizagem da geometria, serão comentados exemplos de episódios significativos ocorridos em aulas de Matemática e com turmas de vários níveis de ensino (2º ciclo, 3º ciclo e secundário) e, finalmente, será apresentado um breve comentário final relativamente às possibilidades e obstáculos que se levantam à integração das investigações matemáticas nas aulas e no currículo.

Geometria e investigações: uma ligação "natural"?

A geometria parece ser, dentro da Matemática escolar, uma área particularmente propícia à realização de actividades de natureza exploratória e investigativa. Quando, no grupo de geometria do projecto, discutimos até que ponto esta afirmação — que nos surgia como quase evidente — poderia ser justificada e documentada, verificámos que o aprofundamento da discussão requeria que alguns pressupostos implícitos sobre o que é a geometria e qual é o seu papel na aprendizagem da Matemática fossem trazidos para o primeiro plano.

Com efeito, a importância da geometria não é independente desses pressupostos. A partir de uma análise da história recente do ensino da Matemática em Portugal, Eduardo Veloso (1998) mostra como, nos anos 70 e 80, a generalização da chamada Matemática Moderna relegou a geometria para um lugar muito secundário. Numa abordagem formal da Matemática, a geometria tornou-se um "parente pobre" da álgebra linear, as actividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matéria de outras disciplinas, como a Educação Visual, a "importância prática" da geometria reduzia-se ao teorema de Pitágoras e a umas quantas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. Nesta abordagem, a intuição e a visualização desempenham um papel menor no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A tendência de revalorização da geometria que, nos últimos anos, tem marcado a evolução curricular em Matemática um pouco por todo o mundo — com reflexos visíveis em Portugal — baseia-se noutros pressupostos. No trabalho atrás referido, Eduardo Veloso invoca, merecidamente, a figura de Hans Freudenthal pela influência decisiva que exerceu neste movimento. Para Freudenthal (1973), a geometria é essencialmente "compreender o espaço" que a criança "deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor". Nesta perspectiva, a geometria torna-se um campo privilegiado de matematização da realidade e de realização de descobertas. É particularmente interessante que Freudenthal chame a atenção para dois aspectos da riqueza da geometria que poderiam parecer contraditórios mas que na verdade se completam: por um lado, as descobertas geométricas, sendo feitas também "com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes"; por outro lado, salientando a necessidade de explicação lógica das suas conclusões, a geometria pode fazer sentir aos alunos "a força do espírito humano, ou seja, do seu próprio espírito".

Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares. Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em "receitas" para resolver exercícios-tipo.

A riqueza e variedade da geometria constituem, de facto, argumentos muito fortes para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática:

- Em geometria, contacta-se com uma grande variedade de objectos e situações. Trabalha-se no plano ou no espaço, com figuras planas ou com poliedros, por exemplo, podendo descobrir-se e explorar-se um grande número de propriedades e conexões. A relação entre situações da realidade concreta e situações matemáticas encontra na geometria inúmeros exemplos e concretizações.
- A geometria é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; envolvendo transformações geométricas; em torno das ideias de forma e de dimensão; implicando conexões com outros domínios da Matemática, como os números, a álgebra, o cálculo combinatório, a análise; apelando a processos de "organização local" da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades.
- As actividades investigativas em geometria conduzem rapidamente à necessidade de se lidar com diversos aspectos essenciais da natureza da própria Matemática. Formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornam-se processos naturais. Ao mesmo tempo, surgem oportunidades para se discutir o papel das definições e para se examinar as consequências de se adoptar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática. Além disso, a geometria oferece numerosas ocasiões para se conhecerem exemplos sugestivos da história e da evolução da Matemática.
- Explorações e investigações em geometria podem fazer-se em todos os níveis de escolaridade e a diversos níveis de desenvolvimento. Este facto tem implicações curriculares evidentes.

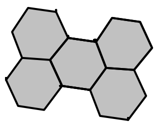
Os episódios que, a seguir, se comentam estão sobretudo relacionados com estes dois últimos pontos. Dizem respeito a aulas do 2º ciclo, do 3º ciclo e do ensino secundário, respectivamente, e mostram como as investigações em geometria podem tornar aspectos centrais do pensamento matemático o foco das actividades de aprendizagem na sala de aula.

Exemplo 1: *Mais hexágonos*

A proposta de trabalho intitulada "Mais hexágonos" foi utilizada em turmas do 2º ciclo de escolas do distrito de Portalegre.

Mais hexágonos…

Hoje vamos investigar o perímetro de figuras formadas por cinco hexágonos unidos pelos lados.
Este é apenas um exemplo



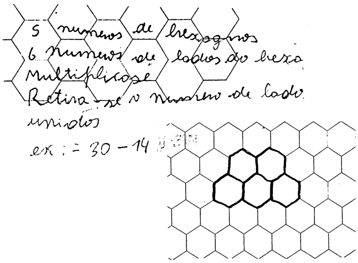
1. Constrói outras figuras diferentes, desenha-as e observa o que se passa com o seu perímetro. Tenta encontrar uma explicação para as descobertas que fizeres.
2. Constrói agora uma figura qualquer com cinco hexágonos. Conseguirás determinar o perímetro sem contar os lados?

Atendendo à sua idade e pouca experiência neste tipo de actividade, os alunos realizaram um trabalho muito interessante e prometedor. Vale a pena analisar algumas descobertas, produzidas numa turma do 6º ano.

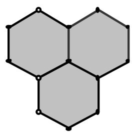
Aluno A:

[O perímetro é sempre um número par pois] se existem 30 lados no total, como eles se perdem dois a dois, ficará sempre um número par.

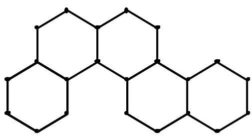
Aluno B:



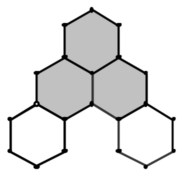
Aluno C:
[explicação oral dada pelo aluno à professora]
Conta-se o número de padrões do tipo seguinte (em qualquer posição).



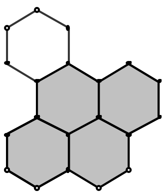
Se não há nenhum, o perímetro é 22. Se há 1, o perímetro é 20. Se há 2, o perímetro é 18. Se há 3, o perímetro é 16.



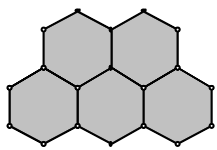
Com 0, perímetro 22



Com 1, perímetro 20



Com 2, perímetro 18



Com 3, …

O aluno A faz uma afirmação trivial mas que corresponde a uma descoberta genuína, a partir de uma relação que observou e que não havia sido sugerida nem sequer pensada pela professora.

O aluno B procura formular uma regra geral, utilizando um raciocínio a que poderíamos chamar pré-algébrico. Não usa letras mas o modo como escreve e o facto de apresentar um caso particular como exemplo sugerem que realmente pensa em termos de variáveis. De outra maneira, o que ele diz é algo como: "Para obter o perímetro, multiplica-se o número de hexágonos por 6 e subtrai-se o dobro do número de lados comuns a dois hexágonos (ou seja, $P = 6n - 2l$)".

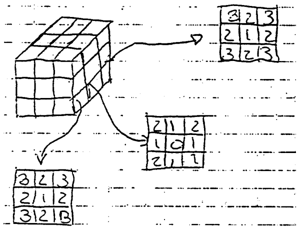
O aluno C faz uma descoberta notável para a sua idade, observando uma regularidade curiosa que lhe permitia relacionar o número de padrões de um certo tipo com o perímetro da figura. Ele criou uma correspondência (0-22, 1-20, 2-18, 3-16), a partir da qual calculava o perímetro de qualquer figura.

Exemplo 2: ***Cubos, cubos e mais cubos***

Cubos de diferentes dimensões construídos a partir de "cubinhos" unitários constituíram o cenário de um conjunto de tarefas propostas em turmas dos 8º e 9º anos. Depois de uma actividade em que os alunos relacionavam a aresta do cubo com o número de "cubinhos" necessários para a construção, propunha-se a seguinte investigação:

> 1. Imagina agora que, depois de construído o cubo de aresta 3 com os cubinhos, se decidiu pintá-lo exteriormente de vermelho.
> Quantos cubinhos ficam com uma única face pintada? E com duas? E com três?… E com nenhuma?
>
> 2. Investiga o que aconteceria se pintássemos um cubo de aresta 4. E se pintássemos um de aresta 5 construído da mesma forma?
>
> Faz um desenho que te ajude a investigar este caso.
>
> Organiza numa tabela as tuas descobertas sobre o número de cubinhos com 0, 1, 2,… faces pintadas num cubo de $3\times3\times3$, $4\times4\times4$, $5\times5\times5$.
>
> Observa a tabela e escreve algumas conclusões a que chegaste.

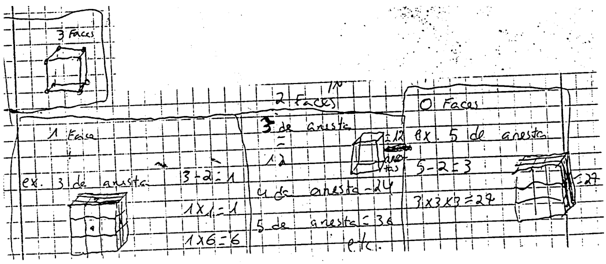
Esta proposta de trabalho deu origem a produções interessantes dos alunos, implicando um esforço de visualização e representação e, por outro lado, uma tentativa de encontrar expressões gerais que indicassem, para um cubo de $n\times n\times n$, o número de "cubinhos" com 0, 1, 2 ou 3 faces pintadas.

Aluno D: 

O aluno D criou um modo de representação muito sugestivo que lhe permitia indicar o número de faces pintadas em cada um 27 "cubinhos", decompondo o cubo 3×3×3 em três "fatias" desde a mais próxima do observador até à mais distante. Note-se que isto ocorreu depois de discussões, nos vários grupos de alunos, sobre quantos "cubinhos" não se viam, quantos ficavam "lá dentro", etc.

Aluno E:

> 0 faces - dois números abaixo da aresta ao cubo;
>
> 1 face - dois números abaixo da aresta ao quadrado × o número de "lados" do cubo (6);
>
> 2 faces - múltiplos de 12 a partir de 3 de aresta;
>
> 3 faces - nº de vértices do cubo (8).



O aluno E realizou um trabalho notável de generalização, no qual o pensamento algébrico está bem patente. Usando uma notação a que estamos mais habituados, aquilo que ele afirma, apresentando exemplos apropriados, é algo como: "Num cubo de *n*×*n*×*n*, o número de "cubinhos" com 0 faces pintadas é $(n-2)^3$; com 1 face pintada é $6.(n-2)^2$; etc.". É interessante observar que este aluno, do 8º ano, já tinha usado letras para resolver equações ou exercícios diversos envolvendo expressões com variáveis mas, quando faz uso, por sua iniciativa e numa actividade genuína de descoberta, do raciocínio algébrico, não as utiliza, recorrendo a descrições.

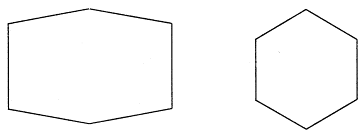
Exemplo 3: ***Poliedros regulares***

Uma sequência de duas propostas de trabalho, utilizadas em turmas do 10º ano, deu origem a interessantes actividades envolvendo o significado da *definição* e a necessidade e alcance da *demonstração* em matemática e evidenciando, ainda, o potencial de elementos da história da matemática.

Primeira tarefa:

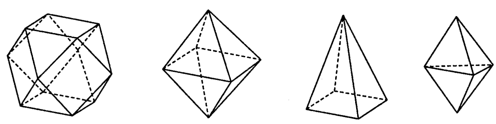
Poliedros

Observa os dois polígonos seguintes:



Ambos são hexágonos. Mas o da direita dizemos que é **regular**, porque tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos também congruentes. O da esquerda apenas tem os lados congruentes, e não os ângulos internos. Por isso Euclides, um matemático grego que viveu há 2300 anos, dizia, em vez de polígono regular, polígono equilátero (lados iguais) e equiângulo (ângulos iguais).

No espaço existem, além dos polígonos, poliedros. Observa com atenção os quatro poliedros seguintes e tenta ver como poderíamos aplicar também a palavra **regular** aos poliedros.



A B C D

Observa os tipos de vértices e de faces que têm estes poliedros e vê se poderíamos chamar a algum deles regular. Explica a tua ideia. Diz depois qual seria a tua definição de poliedro regular.

Nalgumas turmas, a discussão entre os alunos e, sobretudo, aquela que foi conduzida pelo professor com toda a turma a partir das respostas dos vários grupos, proporcionaram uma reflexão importante (e pouco habitual nas nossas aulas, tanto para os alunos como para o professor) sobre a natureza *convencional* e *utilitária* das definições em matemática, ao mesmo tempo que colocaram novos problemas que não tinham sido previstos.

Para considerarmos que um poliedro é regular, (i) as faces devem ser polígonos regulares?, (ii) e devem ser todas iguais?, (iii) e os vértices devem ser todos congruentes? Deveremos exigir que se verifiquem simultaneamente as três condições? E, em caso afirmativo, precisamos de as enunciar todas? Por exemplo, verificando-se (ii) e (iii), verifica-se necessariamente (i)?

Segunda tarefa:

Poliedros regulares

Recorda a definição de poliedro regular que aceitámos. A investigação que agora te propomos é a seguinte:

Quantos poliedros regulares é possível construir? Quais são as suas características?

Sugestão de trabalho:

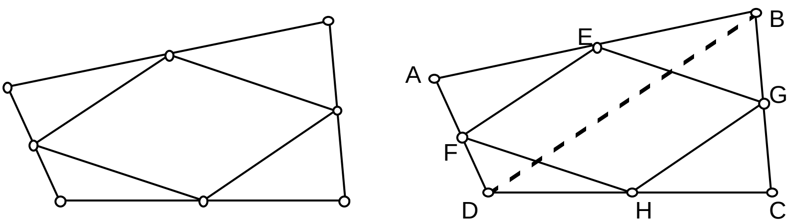
- Começa por construir poliedros regulares com triângulos equiláteros. Regista para cada um as principais características: número e tipo de faces, número e tipo de vértices, número de arestas.
- Faz o mesmo com quadrados, pentágonos, etc.
- Quantos poliedros regulares construíste? Haverá mais? Podes justificar a tua resposta?

Esta tarefa foi proposta na sequência da anterior e, naturalmente, depois de se ter estabelecido a definição (usual) de poliedro regular. Numa primeira fase, os alunos exploraram o material manipulável (*polidrons*) que tinham à sua disposição, chegando à construção dos cinco sólidos platónicos. Numa segunda fase, procuraram (nalguns casos com sugestões do professor) uma demonstração de que não poderia haver mais soluções.

Nalguns casos, como complemento da actividade realizada, foi dado aos alunos um extracto do Livro XIII dos *Elementos*, em que Euclides apresenta uma demonstração muito parecida, no essencial, com a que os alunos fizeram na sala de aula.

Neste caso, a demonstração surge aos olhos dos alunos a assumir o papel que geralmente lhe é atribuído: o de nos dar a *certeza* de que uma hipótese é mesmo válida. Tem interesse referir que este não é o único papel da demonstração e que os alunos devem ter consciência deste facto, sob pena de desvalorizarem o esforço de demonstrar uma afirmação que não está formalmente provada mas não suscita quaisquer dúvidas (pelo menos, enquanto não tiverem sensibilidade para o carácter axiomático da matemática). De facto, em diversas situações, a demonstração não é importante para nos dar a certeza de uma conjectura (de que não duvidamos) mas sim para ajudar a explicar por que razão ela é válida.

Um exemplo interessante desta faceta da demonstração surgiu, tanto no 3º ciclo como no secundário, em aulas em que os alunos foram desafiados a investigar que figuras se podem obter quando unimos os pontos médios de um quadrilátero. Trabalhando com o apoio do Geometer's Sketchpad, é fácil fazer uma construção adequada e, arrastando um dos vértices do quadrilátero inicial, verificar que as figuras em causa são sempre paralelogramos. Mais do que para ter a certeza disto, a demonstração é aqui interessante para se perceber por que razão isso acontece. Eventualmente com uma sugestão do professor no sentido de traçarem as diagonais do quadrilátero, esta demonstração torna-se simples a partir da observação das relações de paralelismo, sendo acessível aos alunos mesmo no 3º ciclo.



Investigações matemáticas no currículo

A par da vertente de produção e experimentação de tarefas de natureza investigativa, o projecto MPT procurou, na componente de investigação educacional, estudar de que modo uma utilização sistemática deste tipo de tarefas nas aulas poderia contribuir para o desenvolvimento, entre os alunos, de capacidades e atitudes favoráveis à actividade investigativa.

O estudo mais prolongado, ainda em fase de análise dos dados, foi conduzido por Joana Porfírio e Teresa Olga. Tomando as investigações matemáticas como um elemento central do currículo, no qual constituíam o ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos, propuseram sucessivas tarefas investigativas na turma do 8º ano com quem trabalharam e que, aliás, já haviam acompanhado numa linha idêntica ao longo do 7º ano (Porfírio & Abrantes, 1999). Os alunos, organizados em pequenos grupos, trabalhavam sobre investigações matemáticas, em todas as unidades do programa, elaborando relatórios nos quais descreviam e explicavam as suas descobertas e processos de trabalho. De modo geral, a uma fase inicial, prolongada, de actividade autónoma dos alunos (desenvolvida com o apoio e supervisão da professora), seguia-se uma fase de sistematização e de discussão geral com toda a turma sobre as descobertas realizadas.

Os dados recolhidos a respeito da evolução das concepções dos alunos sobre a Matemática (Porfírio & Abrantes, a publicar) são particularmente interessantes. Esses dados provêm de entrevistas, depoimentos, relatórios e questionários que, em diversas ocasiões, os alunos foram solicitados a responder. Vale a pena olhar para três exemplos.

1. Nas cartas que os alunos escreveram, imaginando que estavam a explicar a um ET o que é a matemática, há evidência de que desenvolveram sensibilidade para aspectos importantes da natureza desta ciência que, frequentemente, escapam a alunos mesmo de anos mais adiantados. Vejamos alguns extractos destas cartas:

> "Sabemos tudo isto porque os matemáticos investigam e para investigarem certos problemas são capazes de levar anos (…) e às vezes quando pensam que encontram a solução vêem que estavam enganados e voltam a tentar."

> "Tudo isto se descobre investigando. Uma investigação requer muito tempo. Um matemático pode começar uma investigação e depois são outros que acabam… como vês são muitos anos para se saber isto tudo."

> "Uma coisa simples e gira… os triângulos!! Vais a partir de um corte de um triângulo equilátero obter um losango… Como? Com uma folha dobrada ao meio, vais cortar… Giro!!! Não?"

Não há dúvida de que as suas concepções foram fortemente influenciadas pelo peso que as tarefas investigativas tiveram na sua experiência como alunos de Matemática, ainda que deva salientar-se a importância que pode ter a informação e a discussão explícita, na sala de aula e sobre essa experiência, do próprio processo de evolução da matemática. Particularmente curiosa é a última citação, retirada da carta de uma aluna que optou por dar ao ET um exemplo concreto de uma actividade que tinha realizado alguns meses antes.

2. Um questionário feito aos alunos desta turma e de três outras turmas do 8º ano da mesma escola mostra padrões de resposta diferentes relativamente a algumas questões. A pergunta "Porque é importante estudar Matemática?" tinha três opções de resposta, além de um pedido de justificação: (1) Serve para o dia-a-dia; (2) Ajuda na profissão que se quer ter; (3) Ajuda a saber pensar e a compreender.
As escolhas dos alunos distribuíram-se de modos muito diferentes. Na turma que tem vindo a ser referida, essas escolhas foram em termos percentuais: 17.6, 0, 58.8 e 23.5 para as opções 1, 2 e 3 e para outras respostas, respectivamente. No conjunto das outras turmas, os valores correspondentes foram: 41.8, 25.5, 29.1 e 3.6.
Uma diferença tão acentuada, em que uns valorizam muito mais do que os outros os aspectos ligados à compreensão e ao pensamento em detrimento de uma visão utilitarista da Matemática, não se deve certamente ao acaso. Aliás, uma análise das justificações dadas pelos alunos corrobora esta hipótese. Vejamos um exemplo:

> (…) a Matemática não é apenas uma disciplina que nos ajuda a ir às compras, nem é só importante na profissão futura. Sim! É verdade ajuda em tudo isso, mas principalmente ajuda-nos a compreender melhor, a pensar e a interpretar o mundo.

3. No mesmo questionário, uma das perguntas pedia aos alunos uma explicação do que é uma conjectura. Enquanto a maioria dos seus colegas de outras turmas mostrou não ter ideia do que se tratava, a generalidade dos alunos da turma em análise deu respostas aceitáveis, algumas das quais revelando que o conceito lhes era familiar: "uma hipótese"; "uma hipótese de teorema do qual não temos a certeza se será verdade"; "uma possibilidade ainda não confirmada".
Estes dados sugerem que a experiência de realização de actividades investigativas e de discussão sobre os processos utilizados pode desenvolver não só conhecimentos *de* Matemática mas também conhecimentos *sobre* Matemática, isto é, relativos à natureza desta ciência.

Observações finais

O trabalho desenvolvido pelo projecto MPT, em torno da realização de investigações matemáticas na sala de aula, tem revelado potencialidades mas também dificuldades e obstáculos.

De modo geral, os relatórios das experiências levadas a cabo mostram um envolvimento significativo dos alunos, os quais tendem a assumir um papel mais activo e mais autónomo nas aulas de Matemática e uma maior ênfase destas no raciocínio e nos processos de pensamento e da actividade matemática. De facto, explorar situações e ideias, fazer e testar conjecturas, generalizar, discutir, justificar e provar, tornam-se elementos chave do trabalho na sala de aula.

A experiência confirmou que a geometria constitui uma área particularmente propícia à realização de investigações por parte dos alunos. A sua riqueza e variedade em objectos e tipos de problemas, a sua ligação natural à realidade e a possibilidade de todos os alunos, em diferentes níveis, se envolverem em interessantes explorações e investigações geométricas sem dependerem de um grande número de conhecimentos anteriores são factores que contribuem para este potencial da geometria. Os exemplos mostrados neste texto sugerem ainda que as investigações em geometria podem conduzir fácil e naturalmente o trabalho na aula para um foco em processos característicos da actividade matemática. Além disso, podem também proporcionar discussão e reflexão em torno de aspectos centrais da natureza da própria Matemática como ciência.

Alguns obstáculos, que têm sido detectados ou confirmados, devem igualmente ser tomados em consideração. Diversos alunos, sobretudo dos anos mais adiantados, revelam dúvidas sobre o que estão efectivamente a aprender; habituados a outro tipo de aulas e exercícios, alguns tendem a perguntar “onde é que está a matéria?”. Do ponto de vista dos professores, surgem igualmente dúvidas, relacionadas com a pressão do *cumprimento* do programa (“não tenho tempo…”) ou com a auto-confiança necessária para conduzir aulas mais imprevisíveis.

Uma outra dificuldade, de outro tipo, tem a ver com o facto de não se poder esperar uma evolução significativa dos alunos em pouco tempo. O tipo de trabalho aqui delineado requer tempo e persistência, visto que lida essencialmente com a necessidade de mudar aspectos centrais da cultura tradicional da aula de Matemática. Actividades matemáticas de tipo investigativo, quando realizadas de modo isolado ou esporádico, podem ser interessantes no momento mas não abalam, só por si, concepções e práticas muito enraizadas.

Esta questão conduz-nos ao problema dos modos possíveis de integração das investigações matemáticas no currículo. Ainda que os programas actuais abram muito espaço para a realização de investigações, não é claro que estas possam facilmente assumir-se como um elemento central do desenvolvimento do próprio currículo. Não se trata de haver qualquer oposição entre investigações e conteúdos. Pelo contrário, o problema parece estar em criar-se uma cultura de currículo na qual os dois aspectos surjam como intrinsecamente ligados — um problema cuja resolução requer ainda muitas experiências, muita reflexão e muita acção a vários níveis, desde a concepção do currículo até à formação dos professores, passando pelas práticas de gestão curricular na escola.

Trata-se de um desafio que constitui toda uma agenda de investigação educacional, de desenvolvimento curricular e de formação de professores para os próximos anos.

Referências

Abrantes, P., Leal, L. & Ponte, P. (org.) (1996). *Investigar para Aprender Matemática: textos seleccionados*. Lisboa: Projecto "Matemática para Todos" & Associação de Professores de Matemática.

Freudenthal, Hans (1973). Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

National Council of Teachers of Mathemtics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM & IIE.

Porfírio, J. & Abrantes, P. (1999). Teachers, research and curriculum innovation in mathematics. Proceedings of CIEAEM 50, Neuchatel.

Porfírio, J. & Abrantes, P. (a publicar). The mathematics curriculum: training or education? Comunicação apresentada no CIEAEM 51, Chichester, 1999.

Veloso, Eduardo (1998). *Geometria: Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Notas

[1] Texto publicado no livro de E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*, Lisboa: DEFCUL, 1999.
Este texto corresponde a uma conferência proferida pelo autor e foi preparada em colaboração com os restantes elementos do grupo de geometria do projecto "Matemática para Todos" que forneceram igualmente o material que permitiu elaborar sobre os exemplos apresentados: Eduardo Veloso, Fernando Pires, Helena Fonseca, Joana Porfírio e Lina Brunheira.