

ISSN 1980-024X

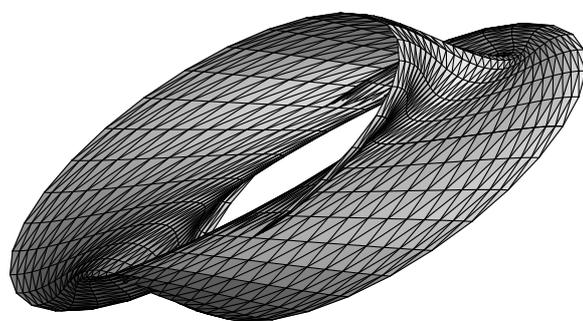
---

---

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
EM MATEMÁTICA – BICMAT

---

---



VOLUME V  
OUTUBRO DE 2008  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
IGCE – RIO CLARO

---

unesp 

## BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA – BICMAT

### *Comissão editorial*

Alice Kimie Miwa Libardi  
Nativi Viana Pereira Bertolo  
Sergio Roberto Nobre

### *Editoração gráfica*

Thiago de Melo

### *Realização*

Conselho de Curso de Graduação em Matemática  
Departamento de Matemática  
IGCE – Unesp – Rio Claro  
PET-Matemática / Programa de Educação Tutorial

## EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de iniciação científica que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE – Unesp – Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat, com ISSN 1980-024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de iniciação científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este número teve apoio do Grupo de Pesquisa: Topologia Algébrica, Diferencial e Geométrica e do Grupo PET/Matemática/Unesp/Rio Claro e estará disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço [www.rc.unesp.br/igce/matematica](http://www.rc.unesp.br/igce/matematica)



## SUMÁRIO

<i>Teorema de Mayer-Vietoris</i>	
Allan Edley Ramos de Andrade .....	7
<i>Sobre a Existência de Campos de Vetores na Esfera</i>	
Diego Franchini Kwiatkoski .....	17
<i>Homeomorfismos e Homotopias</i>	
Karen Regina Panzarin .....	51
<i>Teorema Fundamental da Álgebra</i>	
Northon Canevari Leme Penteado .....	57
<i>A Conexão Como Invariante Topológico</i>	
Cristiane Rodrigues, Flavia Graciani, Paulo R. Isler e Rodrigo de S. Bortolucci .....	63
<i>Introdução à Dinâmica na Vizinhança do Ponto Lagrangeano <math>L_1</math></i>	
João Paulo Cerri .....	69



# Teorema de Mayer-Vietoris

Allan Edley Ramos de Andrade

Orientador(a): João Peres Vieira

**Resumo:** O objetivo deste trabalho é demonstrar o Teorema de Mayer-Vietoris.

**Palavras-chave:** homotopia, extensão, levantamento, grupos, seqüências exatas.

## 1 Preliminares

Nesta seção resumiremos algumas definições, lemas, teoremas, corolários e proposições necessários para o entendimento da demonstração do teorema de Mayer-Vietoris (Teorema 17) na seção 2. Todas as provas desta seção podem ser encontradas na referência [1]. Iniciamos com o

**Lema 1.** *Sejam  $X$  um espaço,  $X_1$  e  $X_2$  subconjuntos fechados de  $X$ , com  $X = X_1 \cup X_2$ . Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função, cujas restrições  $f_1 : X_1 \rightarrow Y$  e  $f_2 : X_2 \rightarrow Y$  são contínuas. Então  $f$  é contínua.*

**Definição 2.**  $H^0(X)$  é o conjunto das funções contínuas  $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ .

**Lema 3.** *Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{Z}$  são funções contínuas, definimos  $-f : X \rightarrow \mathbb{Z}$  e  $(f + g) : X \rightarrow \mathbb{Z}$  por  $(-f)(x) = -f(x)$ ,  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $\forall x \in X$ . Então  $-f$  e  $(f + g)$  são contínuas e  $H^0(X)$  é um grupo com essa operação.*

Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua.

**Definição 4.** Definimos  $f^* : H^0(X) \rightarrow H^0(Y)$  por  $f^*(g) = g \circ f$ .

**Lema 5.**  *$f^*$  é um homomorfismo. Se  $1$  é a identidade de  $X$ ,  $1^*$  é a identidade de  $H^0(X)$ . Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$ , então  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .*

**Definição 6.** Duas funções contínuas  $f, g : Y \rightarrow X$  são chamadas *homotópicas*, se existe uma função contínua  $F : Y \times I \rightarrow X$  onde para todo  $y \in Y$  temos  $F(y, 0) = f(y)$  e  $F(y, 1) = g(y)$ . Quando isto ocorre, dizemos que  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ , e denotamos por  $F : f \simeq g$ . Se  $f$  é homotópica a uma função constante, ela é chamada homotopicamente nula.

**Lema 7.** *Homotopia é uma relação de equivalência entre funções contínuas  $Y \rightarrow X$ .*

Classes de equivalência criadas a partir da relação de homotopia são chamadas classes de homotopia; denotaremos por  $[Y, X]$  o conjunto das classes de homotopia das funções  $f : Y \rightarrow X$  e  $[f]$  a classe de equivalência contendo  $f$ .

**Lema 8.** *Considere  $h : Z \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  e  $W$  um outro espaço. Sendo  $g^* : [X, W] \rightarrow [Y, W]$ , dada por  $g^*[f] = [f \circ g]$ , temos que  $h^* \circ g^* = (g \circ h)^*$ .*

**Lema 9.** *O conjunto  $\text{MAP}(X, S^1)$ , com a operação*

$$* : \text{MAP}(X, S^1) \times \text{MAP}(X, S^1) \rightarrow \text{MAP}(X, S^1)$$

*dada por  $(f, g) \mapsto f * g : X \rightarrow S^1$ , onde  $(f * g)(x) = f(x)g(x)$ , é um grupo abeliano. Esta operação  $*$  é compatível com homotopia. O conjunto  $[X, S^1]$  com a operação  $\Delta : [X, S^1] \times [X, S^1] \rightarrow [X, S^1]$  dada por  $\Delta([f], [g]) = [f * g]$ , adquire a estrutura de um grupo. Se  $f : Y \rightarrow X$  é contínua,  $f^* : [X, S^1] \rightarrow [Y, S^1]$  é um homomorfismo.*

Denotaremos  $[X, S^1]$ , com a estrutura de grupo acima, por  $H^1(X)$ .

**Problemas de levantamento.** Dadas  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Z \rightarrow Y$  contínuas, quando existe  $h : X \rightarrow Z$  contínua com  $g \circ h = f$ ?

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow h & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

**Problemas de Extensão.** Dadas  $g : B \rightarrow A$ ,  $f : B \rightarrow C$  contínuas, quando existe  $h : A \rightarrow C$  contínua com  $h \circ g = f$ ?

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & A \\ f \downarrow & \nearrow h & \\ & & C \end{array}$$

**Teorema 10.** Dado  $X$  um espaço,  $\tilde{f}_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $F : X \times I \rightarrow S^1$  uma homotopia que para cada  $x \in X$ ,  $F(x, 0) = e(\tilde{f}_0(x))$ . Então existe uma única homotopia  $\tilde{F} : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $e \circ \tilde{F} = F$  e  $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}_0(x)$ .

**Corolário 11.** Para todo espaço  $X$ , uma função contínua  $f : X \rightarrow S^1$  tem um levantamento  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,  $f$  é homotópica à uma função constante.

**Prova:** Como  $\mathbb{R}$  é contrátil,  $\tilde{f}$  é homotopicamente nula e assim  $f = e \circ \tilde{f}$  é homotopicamente nula. Reciprocamente, seja  $F : f_0 \simeq f$ , com  $f_0$  uma função constante com imagem  $z_0$  e  $a_0 \in \mathbb{R}$  com  $e(a_0) = z_0$ . Considere  $\tilde{f}_0$  como sendo a função constante com imagem  $a_0$ . Então pelo Teorema 10, podemos levantar a homotopia  $F$  à  $\tilde{F} : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $e \circ \tilde{F} = F$  e  $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}_0(x)$ . Defina  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\tilde{f}(x) = \tilde{F}(x, 1)$ . Então  $\tilde{f}$  levanta  $f$  pois  $(e \circ \tilde{f})(x) = e \circ \tilde{F}(x, 1) = F(x, 1) = f(x)$ . ■

**Teorema 12.** Sejam  $J$  um intervalo aberto em  $\mathbb{R}$ ,  $A$  e  $B$  como no teorema anterior. Então qualquer função contínua  $f : A \rightarrow J$  tem uma extensão contínua  $F : B \rightarrow J$ .

**Proposição 13.** Sejam  $B$  um espaço,  $A$  um subespaço fechado de  $B$ ,  $f_0 : B \rightarrow S^1$  e  $g_t : A \rightarrow S^1$  uma homotopia com  $g_0 = f_0|_A$ . Então  $g_t$  pode ser estendida à uma homotopia  $\tilde{f}_t$  com  $\tilde{f}_0 = f_0$ .

**Definição 14.** Dados três grupos  $X_1, X_2, X_3$  e dois homomorfismos  $\phi_1, \phi_2$  formando uma seqüência  $X_1 \xrightarrow{\phi_1} X_2 \xrightarrow{\phi_2} X_3$ , diremos que esta seqüência é exata

se  $\ker(\phi_2) = \text{Im}(\phi_1)$ .

**Definição 15.** Definimos a função  $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  por  $e(t) = \exp(2\pi it)$ . As propriedades usuais da função exponencial mostram que  $e$  é contínua e sobrejetora, e que é um homomorfismo do grupo aditivo  $\mathbb{R}$  para o grupo multiplicativo  $S^1$ , pois  $e(t+u) = \exp(2\pi i(t+u)) = \exp(2\pi it + 2\pi iu) = \exp(2\pi it) \exp(2\pi iu) = e(t)e(u)$ .

**Lema 16.** O Kernel de  $e$  é o subgrupo  $\mathbb{Z}$  dos inteiros.

**Prova:**  $\ker(e) = \{x \in \mathbb{R}; e(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}; \exp(2\pi ix) = 1\}$ . Mas

$$\begin{aligned} \exp(2\pi ix) = 1 &\iff \log(\exp(2\pi ix)) = \log(1) \iff \\ &\iff 2\pi ix = \ln|1| + i(\arg(1) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \iff \\ &\iff 2\pi ix = i2k\pi \iff x = k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto  $\ker(e) = \{x; x \in \mathbb{Z}\}$ . ■

## 2 O Teorema de Mayer-Vietoris

Nesta seção fixaremos a seguinte notação:  $Y$  é um espaço;  $X_1, X_2$  são subespaços fechados com  $Y = X_1 \cup X_2$  e  $W = X_1 \cap X_2$  (o qual também é fechado). Denotaremos as funções inclusões como no diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X_1 & \\ i_1 \nearrow & & \searrow j_1 \\ W & \xrightarrow{k} & Y \\ i_2 \searrow & & \nearrow j_2 \\ & X_2 & \end{array}$$

tais que,  $k = j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ .

**Teorema 17.** Existe um homomorfismo  $\delta^* : H^0(W) \rightarrow H^1(Y)$  que torna exata

a seqüência

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(Y) & \xrightarrow{(j_1^*, -j_2^*)} & H^0(X_1) \oplus H^0(X_2) & \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} & H^0(W) \xrightarrow{\delta^*} \\ & & & & & & \\ & & \xrightarrow{\delta^*} & H^1(Y) & \xrightarrow{(j_1^*, -j_2^*)} & H^1(X_1) \oplus H^1(X_2) & \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} & H^1(W) . \end{array}$$

**Prova:** *Exatidão em  $H^0(Y)$ :* Dada  $(h : Y \rightarrow \mathbb{Z}) \in \ker(j_1^*, -j_2^*)$ , então

$$(j_1^*, -j_2^*)(h) = (j_1^*(h), -j_2^*(h)) = (0, 0),$$

ou seja,  $0 = j_1^*(h) = h \circ j_1 = h|_{X_1}$  e também  $0 = -j_2^*(h)$ , o que implica  $0 = j_2^*(h) = h \circ j_2 = h|_{X_2}$ . Como  $Y = X_1 \cup X_2$  temos  $h = 0$  e portanto  $\ker(j_1^*, -j_2^*) = 0$ .

*Exatidão em  $H^0(X_1) \oplus H^0(X_2)$ :* Dada  $(j_1^*(f), -j_2^*(f)) \in \text{Im}(j_1^*, -j_2^*)$ , então

$$\begin{aligned} (i_1^*, i_2^*)(j_1^*(f), -j_2^*(f)) &= i_1^* \circ j_1^*(f) + i_2^* \circ (-j_2^*)(f) = \\ &= (j_1 \circ i_1)^*(f) - (j_2 \circ i_2)^*(f) = k^*(f) - k^*(f) = 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\text{Im}(j_1^*, -j_2^*) \subseteq \ker(i_1^*, i_2^*). \quad (1.1)$$

Reciprocamente, dada  $(g_1, g_2) \in \ker(i_1^*, i_2^*)$ , então

$$0 = (i_1^*, i_2^*)(g_1, g_2) = i_1^*(g_1) + i_2^*(g_2) = g_1|_W + g_2|_W.$$

Queremos encontrar  $h \in H^0(Y)$  tal que  $(j_1^*, -j_2^*)(h) = (g_1, g_2)$ . Definamos então  $h : Y \rightarrow \mathbb{Z}$  por  $h|_{X_1} = g_1$  e  $h|_{X_2} = -g_2$ . Assim, temos que  $h$  está bem definida pois  $g_1|_W + g_2|_W = 0$ , isto é,  $g_1$  e  $-g_2$  coincidem em  $W = X_1 \cap X_2$ . Como  $g_1$  e  $g_2$  são contínuas e  $X_1$  e  $X_2$  são fechados, pelo lema 1,  $h$  é contínua. Agora,  $g_1 = h|_{X_1} = j_1^*(h)$  e  $g_2 = -h|_{X_2} = -j_2^*(h)$ , logo temos que  $(g_1, g_2) = (j_1^*, -j_2^*)(h)$  e portanto

$$\ker(i_1^*, i_2^*) \subseteq \text{Im}(j_1^*, -j_2^*). \quad (1.2)$$

Por (1.1) e (1.2) temos  $\ker(i_1^*, i_2^*) = \text{Im}(j_1^*, -j_2^*)$ .

*Definição de  $\delta^*$ :* Dada  $l : W \rightarrow \mathbb{Z}$  contínua, compondo com a inclusão  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , temos  $i \circ l : W \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, e portanto pelo teorema 12, podemos estender  $i \circ l$  à uma função contínua  $g : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Definamos então  $h : Y \rightarrow S^1$  por  $h|_{X_1} = e \circ g$ ,  $h|_{X_2} = \{1\}$ .

Temos que  $e \circ g : X_1 \rightarrow S^1$  e  $c : X_2 \rightarrow S^1$  com  $c(x) = 1, \forall x \in X_2$ , são contínuas e ainda temos que coincidem em  $W = X_1 \cap X_2$ , pois, dado  $y \in W = X_1 \cap X_2$ , temos  $g(y) = l(y) \in \mathbb{Z}$ , e pelo lema 16  $(e \circ g)(y) = e(g(y)) = 1 = c(y)$ , e assim, pelo lema 1 temos que  $h$  é contínua. Definamos  $\delta^*(l) = [h]$ .

*$\delta^*$  está bem definida:* Suponha que exista  $g' : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$  outra extensão de  $i \circ l$ . Então  $\delta^*(l) = [h']$  onde  $h' : Y \rightarrow S^1$  é dada por  $h'|_{X_1} = e \circ g'$  e  $h'|_{X_2} = \{1\}$ . Temos que mostrar que  $h \simeq h'$ .

Seja  $G : X_1 \times I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $G(x, t) = (1 - t)g(x) + tg'(x)$ . Temos que  $G$  é contínua pois é soma de funções contínuas e  $G(W \times I) = (i \circ l)(W) \subseteq \mathbb{Z}$  pois dado  $(w, t) \in W \times I$ ,  $G(w, t) = (1 - t)g(w) + tg'(w)$  e como  $g$  e  $g'$  são extensões de  $i \circ l$ , segue que  $G(w, t) = (1 - t)(i \circ l)(w) + t(i \circ l)(w) = (i \circ l)(w)$ . Assim podemos definir  $H : Y \times I \rightarrow S^1$  por

$$H(x, t) = \begin{cases} e \circ G(x, t), & \text{se } x \in X_1 \\ 1, & \text{se } x \in X_2 \end{cases}.$$

Temos que  $H$  é uma homotopia entre  $h$  e  $h'$ , pois é contínua pelo lema 1 e

$$H(x, 0) = \begin{cases} e \circ G(x, 0), & \text{se } x \in X_1 \\ 1, & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = h(x),$$

$$H(x, 1) = \begin{cases} e \circ G(x, 1), & \text{se } x \in X_1 \\ 1, & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = h'(x).$$

Portanto  $h \simeq h'$ .

*$\delta^*$  é um homomorfismo:* Dadas  $f : W \rightarrow \mathbb{Z}$  e  $f' : W \rightarrow \mathbb{Z}$  funções contínuas,  $g : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g' : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$  extensões contínuas de  $i \circ f$  e  $i \circ f'$ , respectivamente, então  $\delta^*(f) = [h]$ , onde  $h : Y \rightarrow S^1$  é dada por  $h|_{X_1} = e \circ g$ ,  $h|_{X_2} = \{1\}$ , e  $\delta^*(f') = [h']$ , onde  $h' : Y \rightarrow S^1$  é dada por  $h'|_{X_1} = e \circ g'$ ,  $h'|_{X_2} = \{1\}$ .

Temos que  $g + g' : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $(g + g')(x) = g(x) + g'(x)$ , é uma extensão contínua de  $i \circ (f + f') : W \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $i \circ (f + f')(x) = i \circ f(x) + i \circ f'(x)$ , pois para  $x \in W$ ,  $(g + g')(x) = g(x) + g'(x) = i \circ f(x) + i \circ f'(x) = i \circ (f + f')(x)$ . Também  $g + g'$  é contínua pois é soma de funções contínuas.

Assim,  $\delta^*(f + f') = [h'']$ , onde  $h'' : Y \rightarrow S^1$  é definida por  $h''|_{X_1} = e \circ (g + g')$ ,  $h''|_{X_2} = \{1\}$ . Agora,  $e \circ (g + g') = (e \circ g)(e \circ g') = h|_{X_1} h'|_{X_1} = (hh')|_{X_1}$  e  $h''|_{X_2} = \{1\} = (hh')|_{X_2}$ . Logo  $h'' = hh'$ , onde  $hh' : Y \rightarrow S^1$  é dada por  $(hh')(x) = h(x)h'(x)$ . Assim,  $\delta^*(f + f') = [h''] = [hh'] = [h][h'] = \delta^*(f)\delta^*(f')$ .

*Exatidão em  $H^0(W)$ :* (i)  $\text{Im}(i_1^*, i_2^*) \subseteq \ker(\delta^*)$ . Dados  $g_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{Z} \in H^0(X_1)$  e  $g_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{Z} \in H^0(X_2)$ , com  $i_1^* \circ g_1 = f_1$  e  $i_2^* \circ g_2 = f_2$ , queremos mostrar que  $\delta^*((i_1^*, i_2^*)(g_1, g_2)) = [k]$ , onde  $k : Y \rightarrow S^1$  é dada por  $k(x) = 1, \forall x \in Y$ .

Como  $i \circ g_1$  é uma extensão de  $i \circ f_1$ , temos que  $\delta \circ f_1 = [h_1]$ , onde  $h_1 : Y \rightarrow S^1$  é dada por  $h_1|_{X_1} = e \circ (i \circ g_1)$ ,  $h_1|_{X_2} = \{1\}$ . Como  $i \circ g_1(X_1) \subseteq \mathbb{Z}$ , temos pelo lema 16 que  $e \circ (i \circ g_1(X_1)) = \{1\}$ ; assim  $h_1 : X_1 \rightarrow S^1$  é igual a função  $k$  e portanto  $\delta^* \circ f_1 = [h_1] = [k]$ .

Seja  $g_2' : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma extensão de  $i \circ f_2 : W \rightarrow \mathbb{R}$ . Então  $g_2'(x) = (i \circ g_2)(x), \forall x \in W$ , pois ambas as funções estendem  $i \circ f_2$ . Definamos então

$$\tilde{h}_2 : Y \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{por} \quad \tilde{h}_2|_{X_1} = g_2'; \tilde{h}_2|_{X_2} = i \circ g_2$$

que é contínua pelo lema 1. Temos que  $g_2'$  é uma extensão de  $i \circ f_2$  e então  $\delta^*(f_2) = [h_2]$ , onde  $h_2 : Y \rightarrow S^1$  e dado por  $h_2|_{X_1} = e \circ g_2'$  e  $h_2|_{X_2} = \{1\}$ .

Afirmamos que  $\tilde{h}_2$  é um levantamento de  $h_2$ , pois para  $x \in X_1$ ,  $e \circ \tilde{h}_2(x) = e \circ g_2'(x) = h_2(x)$  e para  $x \in X_2$ ,  $e \circ \tilde{h}_2(x) = e \circ (i \circ g_2(x)) = 1 = h_2(x)$ . Como  $h_2$  possui um levantamento, pelo corolário 11 temos que  $h_2$  é homotopicamente nula. Assim  $h_2 \simeq c$ , onde  $c$  é uma função constante; e como a função constante  $c$  é homotópica à função constante  $k$ , temos  $[h_2] = [k]$ , e daí segue que  $\delta^*(i_1^*, i_2^*)(g_1, g_2) = \delta^*(f_1 + f_2) = \delta^*(f_1)\delta^*(f_2) = [h_1][h_2] = [k][k] = [k]$ .

(ii)  $\text{Im}(i_1^*, i_2^*) \supseteq \ker(\delta^*)$ . Dado  $f : W \rightarrow \mathbb{Z} \in \ker(\delta^*)$ , seja  $g : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma extensão de  $i \circ f$  e  $h$  como na definição de  $\delta^*(f)$ . Então  $h$  é homotopicamente

nula, pois  $[k] = \delta^*(f) = [h]$ . Assim pelo corolário 11 podemos encontrar um levantamento  $\tilde{h} : Y \rightarrow \mathbb{R}$  de  $h$ . Como  $h(X_2) = \{1\}$ , devemos ter  $e \circ \tilde{h}(X_2) = h(X_2) = \{1\}$ , ou seja  $\tilde{h}(X_2) \subseteq \mathbb{Z}$ . Desta forma  $\tilde{h}$  define uma função  $g_2 = \tilde{h}|_{X_2} : X_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Temos também que ambas as funções  $\tilde{h}|_{X_1}$  e  $g$  levantam a função  $h|_{X_1} = e \circ g$  e assim fica bem definida a função  $g_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por  $g_1(y) = g(y) - \tilde{h}(y)$ , pois para  $y \in X_1$ ,  $e \circ g_1(y) = e(g(y) - \tilde{h}(y)) = e(g(y))e(-\tilde{h}(y)) = (h|_{X_1})(y)(e(\tilde{h}(y)))^{-1} = (h|_{X_1})(y)((h|_{X_1})(y))^{-1} = 1$ , ou seja  $g_1(y) \in \mathbb{Z}$ .

Agora, para  $w \in W$ ,  $g_1$  e  $g_2$  estão definidas e  $f(w) = g(w) = g_1(w) + \tilde{h}(w)$ , ou seja,  $(i_1^*, i_2^*)(g_1, g_2) = i_1^* \circ g_1 + i_2^* \circ g_2 = g_1|_W + g_2|_W = g_1|_W + \tilde{h}|_W = f$ .

*Exatidão em  $H^1(Y)$* : Inicialmente observemos que  $-j_2^* : H^1(Y) \rightarrow H^1(X_2)$  é definida por  $-j_2^*[h] = [h \circ j_2]^{-1}$  (inversa da classe  $[h \circ j_2]$ ).

(i)  $\text{Im}(\delta^*) \subseteq \ker(j_1^*, -j_2^*)$ . Dada  $(f : W \rightarrow \mathbb{Z}) \in H^0(W)$ , queremos mostrar que  $(j_1^*, -j_2^*)\delta^*(f) = ([e_1], [e_2])$ , onde  $e_1 : X_1 \rightarrow S^1$  é dada por  $e_1(x) = 1, \forall x \in X_1$  e  $e_2 : X_2 \rightarrow S^1$  é dada por  $e_2(x) = 1, \forall x \in X_2$ .

Seja  $g : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma extensão de  $i \circ f$  e  $h$  como na definição de  $\delta^*(f)$ . Então

$$\begin{aligned} (j_1^*, -j_2^*)\delta^*(f) &= (j_1^*(\delta^*(f)), -j_2^*(\delta^*(f))) = \\ &= (j_1^*([h]), -j_2^*([h])) = ([h \circ j_1], [h \circ j_2]^{-1}). \end{aligned}$$

Temos que  $h \circ j_1 : X_1 \rightarrow S^1$  é dada por  $h \circ j_1(x) = e \circ g(x)$  pois  $j_1(x) \in X_1$ , ou seja,  $h \circ j_1$  possui um levantamento  $g : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Segue novamente pelo corolário 11 que  $h \circ j_1$  é homotopicamente nula e pelos mesmos argumentos feitos anteriormente temos  $[h \circ j_1] = [e_1]$ .

Temos também que  $h \circ j_2$  é dado pela função constante igual a 1, logo  $[h \circ j_2]^{-1} = [e_2]^{-1} = [e_2]$ . Finalmente temos que

$$(j_1^*, -j_2^*)\delta^*(f) = ([h \circ j_1], [h \circ j_2]^{-1}) = ([e_1], [e_2]).$$

(ii)  $\ker(j_1^*, -j_2^*) \subseteq \text{Im}(\delta^*)$ . Dada  $[h] \in \ker(j_1^*, -j_2^*)$ , queremos encontrar

$f \in H^0(W)$  com  $\delta^*(f) = [h]$ . Temos que

$$([e_1], [e_2]) = (j_1^*, -j_2^*)[h] = ([h \circ j_1], [h \circ j_2]^{-1}).$$

Assim  $h \circ j_1 \simeq e_1$  e  $h \circ j_2 \simeq e_2$ , e portanto segue que as restrições  $h|_{X_1} = h \circ j_1$  e  $h|_{X_2} = h \circ j_2$  são funções homotópicas às funções  $e_1$  e  $e_2$  respectivamente.

Pela proposição 13, a homotopia entre  $h|_{X_2}$  e  $e_2$  pode ser estendida a uma homotopia entre  $h$  e  $h' : Y \rightarrow S^1$  com  $h'|_{X_2} = \{1\}$ .

Agora  $h'|_{X_1}$  é homotópica a  $h|_{X_1}$  e como  $h|_{X_1}$  é homotópica a  $e_1$ , temos pelo lema 7 que  $h'|_{X_1}$  é homotópica a  $e_1$ , e portanto segue pelo corolário 11 que  $h'|_{X_1}$  tem um levantamento  $g : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Seja  $f = g|_W$ . Então  $f$  se levanta à função  $W \rightarrow \{1\}$ , pois para  $x \in W$ ,  $e \circ f(x) = e \circ g(x) = h'(x) = 1$ . Logo  $f$  assume valores em  $\mathbb{Z}$ . Agora pela construção de  $f$  temos que  $\delta^*(f) = [h'] = [h]$ .

*Exatidão em  $H^1(X_1) \oplus H^1(X_2)$ :* (i)  $\text{Im}(j_1^*, -j_2^*) \subseteq \ker(i_1^*, i_2^*)$ . Temos que

$$(i_1^*, i_2^*)(j_1^*, -j_2^*) = i_1^*j_1^* - i_2^*j_2^* = (j_1 \circ i_1)^* - (j_2 \circ i_2)^* = k^* - k^* = 0.$$

(ii)  $\ker(i_1^*, i_2^*) \subseteq \text{Im}(j_1^*, -j_2^*)$ . Dada  $([g_1], [g_2]) \in \ker(i_1^*, i_2^*)$ , então

$$[e] = (i_1^*, i_2^*)([g_1], [g_2]) = i_1^*([g_1])i_2^*([g_2]) = [g_1 \circ i_1][g_2 \circ i_2] = [g_1|_W][g_2|_W].$$

Assim  $[g_1|_W] = [g_2|_W]^{-1} = [(g_2|_W)^{-1}]$  e  $g_1|_W \simeq (g_2|_W)^{-1}$ .

Pela proposição 13 a homotopia entre  $g_1|_W$  e  $(g_2|_W)^{-1}$  pode ser estendida a uma homotopia entre  $g_1$  e  $g_1'$  com  $g_1'(w) = (g_2(w))^{-1}$ , para todo  $w \in W$ .

Agora definimos  $h : Y \rightarrow S^1$  por  $h|_{X_1} = g_1'$  e  $h(y) = g_2(y)^{-1}$  para todo  $y \in X_2$ . Então, pelo lema 1,  $h$  é contínua.

Agora temos

$$(j_1^*, -j_2^*)[h] = ([h \circ j_1], [h \circ j_2]^{-1}) = ([h \circ j_1], [(h \circ j_2)^{-1}]) = ([g_1'], [g_2]) = ([g_1], [g_2]).$$

■

**Abstract:** The purpose of this work is to prove the Mayer-Vietoris theorem.

**Keywords:** Homotopy, extension, lifting, groups, exact sequences.

## Referências Bibliográficas

- [1] WALL, C.T.C., *A Geometric Introduction to Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

# Sobre a Existência de Campos de Vetores na Esfera

Diego Franchini Kwiatkoski<sup>1</sup>

Orientador(a): Alice Kimie Miwa Libardi

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos um estudo sobre a existência de campos de vetores na esfera, usando grau de aplicação e a seqüência de Mayer-Vietoris.

**Palavras-chave:** seqüência de Mayer-Vietoris, campos de vetores, grau de aplicações

## 1 Introdução

A existência de campos de vetores foi objeto de estudo de diversos matemáticos ao longo dos anos. A Topologia Algébrica contribuiu para o desenvolvimento da pesquisa mediante o uso de alguns invariantes, tais como característica de Euler, classes características que pertencem a um determinado grupo de cohomologia.

Nesse trabalho provamos um resultado devido a Brouwer-Poincaré sobre a existência de campos de vetores na esfera, usando como ferramenta a noção de grau de aplicações, a qual definimos abaixo. Foi importante também o conhecimento da seqüência de Mayer-Vietoris que nos permitiu calcular o grau de uma aplicação  $f : S^n \rightarrow S^n$  definida por  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ .

## 2 Simplexos

**Definição 1.** Se  $x$  e  $y$  são pontos em  $\mathbb{R}^n$ , definimos o segmento de  $x$  a  $y$  como  $\{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\}$ . Um subconjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  é convexo se dados  $x$  e  $y$  em  $C$ , o segmento que une  $x$  a  $y$  está inteiramente contido em  $C$ . Note que

---

<sup>1</sup>Bolsista FAPESP, Processo 06/00261-5. E-mail: [dfkwi@terra.com.br](mailto:dfkwi@terra.com.br)

uma interseção arbitrária de conjuntos convexos é convexa. Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , o fecho convexo de  $A$  é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém  $A$ .

**Definição 2.** Um  $p$ -simplexo  $s$  em  $\mathbb{R}^n$  é o fecho convexo de uma coleção de  $p + 1$  pontos  $\{x_0, \dots, x_p\}$  na qual  $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$  formam um conjunto linearmente independente. Note que a definição independe da designação de qual ponto é  $x_0$ .

**Proposição 3.** *Seja  $\{x_0, \dots, x_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a)  $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$  são linearmente independentes;

(b) se  $\sum s_i x_i = \sum t_i x_i$  e  $\sum s_i = \sum t_i$ , então  $s_i = t_i$ , para  $i = 0, \dots, p$ .

**Prova:** (a) $\Rightarrow$ (b): Se  $\sum s_i x_i = \sum t_i x_i$  e  $\sum s_i = \sum t_i$ , então

$$0 = \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) x_i = \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) x_i - \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) x_0 = \sum_{i=1}^p (s_i - t_i) (x_i - x_0).$$

Pela independência linear de  $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$ , segue que  $s_i = t_i$  para  $i = 1, \dots, p$ . Finalmente, isto implica  $s_0 = t_0$ , visto que  $\sum s_i = \sum t_i$ .

(b) $\Rightarrow$ (a): Se  $\sum_{i=1}^p (t_i)(x_i - x_0) = 0$ , então  $\sum_{i=1}^p t_i x_i = (\sum_{i=1}^p t_i) x_0$  e então por (b) os coeficientes  $t_1, \dots, t_n$  devem ser todos iguais a zero. Isto prova a independência linear. ■

Seja  $s$  um  $p$ -simplexo em  $\mathbb{R}^n$  e considere o conjunto de todos os pontos da forma  $t_0 x_0 + t_1 x_1 + \dots + t_p x_p$ , onde  $\sum t_i = 1$  e  $t_i \geq 0$  para cada  $i$ . Note que se trata do fecho convexo do conjunto  $\{x_0, \dots, x_p\}$  e conseqüentemente da Proposição 3 temos o seguinte:

**Proposição 4.** *Se o  $p$ -simplexo  $s$  é o fecho convexo de  $\{x_0, \dots, x_p\}$ , então cada ponto de  $s$  tem representação única na forma  $\sum t_i x_i$ , onde  $t_i \geq 0$  para todo  $i$  e  $\sum t_i = 1$ .*

Os pontos  $x_i$  são os vértices de  $s$ . Esta proposição nos permite associar os pontos de  $s$  com  $(p + 1)$ -uplas  $(t_0, t_1, \dots, t_p)$  com uma escolha adequada das coordenadas  $t_i$ .

Se aos vértices de  $s$  é dada uma ordem específica, então  $s$  é um simplexo ordenado. Então seja  $s$  um simplexo ordenado com vértices  $x_0, x_1, \dots, x_p$ . Defina  $\sigma_p$  como o conjunto de todos os pontos  $(t_0, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$  com  $\sum t_i = 1$  e  $t_i \geq 0$  para cada  $i$ . Se uma função  $f : \sigma_p \rightarrow s$  é dada por  $f(t_0, \dots, t_p) = \sum t_i x_i$ , então  $f$  é contínua. Além disso, da unicidade de representações e do fato que  $\sigma_p$  e  $s$  são espaços compactos e de Hausdorff segue que  $f$  é um homeomorfismo. Deste modo, cada  $p$ -simplexo ordenado é uma imagem homeomorfa natural de  $\sigma_p$ . Note que  $\sigma_p$  é um  $p$ -simplexo com vértices  $x'_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $x'_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $x'_p = (0, \dots, 0, 1)$ .  $\sigma_p$  é chamado  $p$ -simplexo padrão com ordem natural.

**Definição 5.** Seja  $X$  um espaço topológico. Um  $p$ -simplexo singular em  $X$  é uma função contínua  $\phi : \sigma_p \rightarrow X$ . Note que os 0-simplexos singulares podem ser identificados com os pontos de  $X$ , os 1-simplexos singulares com os caminhos em  $X$ , e daí em diante.

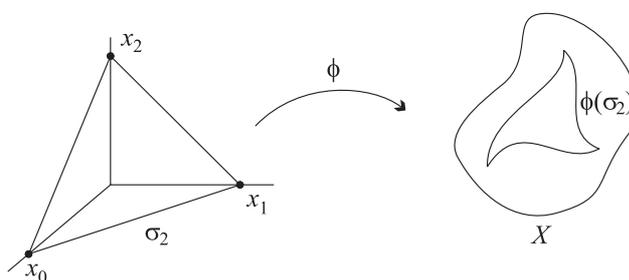
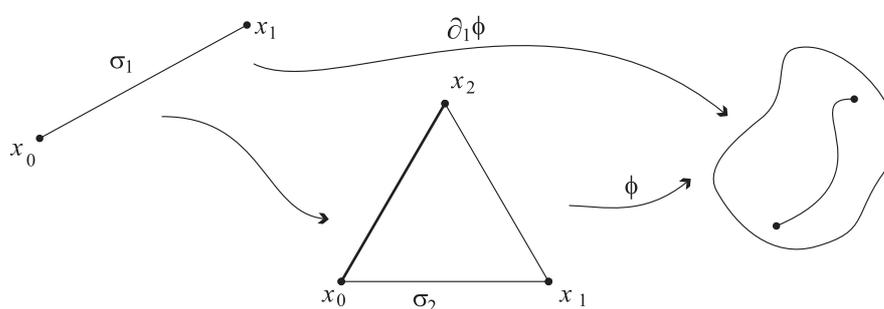
**Definição 6.** Se  $\phi$  é um  $p$ -simplexo singular e  $i$  é um inteiro com  $0 \leq i \leq p$ , definimos  $\partial_i(\phi)$ , um  $(p - 1)$ -simplexo singular em  $X$ , por

$$\partial_i \phi(t_0, \dots, t_{p-1}) = \phi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}).$$

Observe que  $\partial_i \phi$  é a  $i$ -ésima face de  $\phi$ .

Por exemplo, seja  $\phi$  um 2-simplexo singular em  $X$  (Figura 1.1). Então,  $\partial_1 \phi$  é dado pela composição mostrada na Figura 1.2. Isto é, para calcular  $\partial_i \phi$  mergulhamos  $\sigma_{p-1}$  em  $\sigma_p$  oposto ao  $i$ -ésimo vértice usando a ordem usual de vértices, e então para  $X$ , via  $\phi$ .

Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua e  $\phi$  é um  $p$ -simplexo singular em  $X$ , definimos um  $p$ -simplexo singular  $f_{\#}(\phi)$  em  $Y$  por  $f_{\#}(\phi) = f \circ \phi$ . Note que se  $g : Y \rightarrow W$  é contínua e  $Id : X \rightarrow X$  é a identidade,  $(g \circ f)_{\#}(\phi) = g_{\#}[f_{\#}(\phi)]$  e  $Id_{\#}(\phi) = \phi$ .

Figura 1.1: 2-simplexo singular  $\phi$ .Figura 1.2: Bordo  $\partial_1\phi$ .

**Definição 7.** Um grupo abeliano  $G$  é livre se existe um subconjunto  $A \subseteq G$  tal que todo elemento  $g$  em  $G$  tem uma representação única  $g = \sum_{x \in A} n_x \cdot x$ , onde  $n_x$  é um inteiro e é igual a zero exceto para um número finito de  $x$  em  $A$ . O conjunto  $A$  é uma base para  $G$ .

Dado um conjunto arbitrário  $A$ , podemos construir um grupo abeliano livre da seguinte maneira: seja  $F(A)$  o conjunto de todas as funções  $f$  de  $A$  nos inteiros tais que  $f(x) \neq 0$  apenas para um número finito de elementos de  $A$ . Definimos uma operação em  $F(A)$  por  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ . Então  $F(A)$  é um grupo abeliano. Para qualquer  $a \in A$  definimos uma função  $f_a$  em  $F(A)$  por

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = a, \\ 0 & \text{se } x \neq a. \end{cases}$$

Então  $\{f_a | a \in A\}$  é uma base para  $F(A)$  como um grupo abeliano livre. Identificando  $a$  com  $f_a$  completamos a construção.

Por exemplo, seja  $G = \{(n_1, n_2, \dots) \mid n_i \in \mathbb{Z}, \text{ eventualmente } 0\}$ . Então  $G$  é um grupo abeliano sob a adição coordenada a coordenada, e além disso é livre com base  $(1, 0, \dots)$ ,  $(0, 1, 0, \dots)$ ,  $(0, 0, 1, 0, \dots)$ ,  $\dots$ . Por conveniência dizemos que se  $G = 0$ , então  $G$  é um grupo abeliano livre com base vazia.

Note que se  $G$  é abeliano livre com base  $A$  e  $H$  é um grupo abeliano, então toda função  $f : A \rightarrow H$  pode ser estendida univocamente a um homomorfismo  $f : G \rightarrow H$ .

**Definição 8.** Se  $X$  é um espaço topológico definimos  $S_n(X)$  como o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto de todos os  $n$ -simplexos singulares de  $X$ . Um elemento de  $S_n(X)$  é chamado de  $n$ -cadeia singular de  $X$  e é da forma  $\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi$ , onde  $n_{\phi} \in \mathbb{Z}$ , e é igual a zero exceto para um número finito de  $\phi$ .

**Definição 9.** Visto que o  $i$ -ésimo operador face  $\partial_i$  é uma função do conjunto de  $n$ -simplexos singulares no conjunto de  $(n - 1)$ -simplexos singulares, existe uma única extensão a um homomorfismo  $\partial_i : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  dado por  $\partial_i(\sum n_{\phi} \cdot \phi) = \sum n_{\phi} \cdot \partial_i \phi$ . Definimos o operador bordo pelo homomorfismo  $\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  dado por

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 + \dots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i.$$

**Proposição 10.** A composição  $\partial \circ \partial$  em

$$S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-2}(X)$$

é zero.

Geometricamente este enunciado diz que o bordo de qualquer  $n$ -cadeia é uma  $(n - 1)$ -cadeia sem bordo. É essa propriedade básica que nos leva à definição de grupos de homologia. Um elemento  $c \in S_n(X)$  é um  $n$ -ciclo se  $\partial(c) = 0$ . Um elemento  $d \in S_n(X)$  é um  $n$ -bordo se  $d = \partial(e)$  para algum  $e \in S_{n+1}(X)$ .

Visto que  $\partial$  é um homomorfismo, seu núcleo, o conjunto de todos os  $n$ -ciclos, é um subgrupo de  $S_n(X)$  denotado por  $Z_n(X)$ . Similarmente a imagem de  $\partial$  em  $S_n(X)$  é o subgrupo  $B_n(X)$  de todos os  $n$ -bordos.

### 3 Grupo de Homologia Singular

**Definição 11.** Note que a Proposição 10 implica que  $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$  é um subgrupo normal. O grupo quociente

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

é o  $n$ -ésimo grupo de homologia singular de  $X$ .

A motivação geométrica para esta construção algébrica é a seguinte: os objetos que queremos estudar são ciclos em espaços topológicos. Entretanto, usando ciclos singulares, a coleção de todos é extensa demais para ser efetivamente estudada. A aproximação natural é então restringir a atenção a classes de equivalência de ciclos sob a relação que dois ciclos são equivalentes se a diferença deles formar um bordo de uma cadeia de uma dimensão maior.

Esta técnica algébrica é uma construção padrão em álgebra homológica. Um grupo (abeliano) graduado  $G$  é uma coleção de grupos abelianos  $\{G_i\}$  indexado pelos inteiros com operação componente a componente. Se  $G$  e  $G'$  são grupos graduados, um homomorfismo  $f : G \rightarrow G'$  é uma coleção de homomorfismos  $\{f_i\}$ , onde  $f_i : G_i \rightarrow G'_{i+r}$  para algum inteiro  $r$  fixado.  $r$  é chamado grau de  $f$ . Um subgrupo  $H \subseteq G$  de um grupo graduado é um grupo graduado  $\{H_i\}$ , onde  $H_i$  é um subgrupo de  $G_i$ . O grupo quociente  $G/H$  é o grupo graduado  $\{G_i/H_i\}$ .

**Definição 12.** Um complexo de cadeias é uma seqüência de grupos abelianos e homomorfismos

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

na qual a composição  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$  para cada  $n$ . Equivalentemente, um complexo de cadeias é um grupo graduado  $C = \{C_i\}$  junto com um homomorfismo

$\partial : C \rightarrow C$  de grau  $-1$  tal que  $\partial \circ \partial = 0$ . Se  $C$  e  $C'$  são complexos de cadeias com operadores bordo  $\partial$  e  $\partial'$ , uma aplicação de cadeias de  $C$  em  $C'$  é um homomorfismo  $\Phi : C \rightarrow C'$  de grau zero tal que  $\partial' \circ \Phi_n = \Phi_{n-1} \circ \partial$  para cada  $n$ . (Note que a exigência que  $\Phi$  tem grau zero é desnecessária. Está enunciada aqui apenas por conveniência visto que todas as aplicações de cadeias que consideraremos têm esta propriedade). Denotando por  $Z_*(C)$  e  $B_*(C)$  o núcleo e a imagem de  $\partial$  respectivamente, a homologia de  $C$  é o grupo graduado  $H_*(C) = Z_*(C)/B_*(C)$ . Note que se  $\Phi$  é uma aplicação de cadeias,  $\Phi[Z_*(C)] \subseteq Z_*(C')$  e  $\Phi[B_*(C)] \subseteq B_*(C')$ . Portanto,  $\Phi$  induz um homomorfismo em grupos de homologia  $\Phi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$ .

#### 4 Aplicações Induzidas em Homologia Singular

Neste sentido, o grupo graduado  $S_*(X) = \{S_i(X)\}$  se torna um complexo de cadeias sob o operador bordo  $\partial$ , e então o grupo de homologia de  $X$  é a homologia deste complexo de cadeias. Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua e  $\phi$  é um  $n$ -simplexo singular em  $X$ , existe o  $n$ -simplexo singular  $f_{\#}(\phi) = f \circ \phi$  em  $Y$ . Isto se estende unicamente a um homomorfismo  $f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  para cada  $n$ . Para mostrar que  $f_{\#}$  é uma aplicação cadeia de  $S_*(X)$  em  $S_*(Y)$  devemos checar que o seguinte retângulo comuta:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_n(Y) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ S_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

Primeiro note que é suficiente checar que isto é verdade em  $n$ -simplexos  $\phi$ , e segundo, observe que é suficiente mostrar que  $\partial_i f_{\#}(\phi) = f_{\#} \partial_i(\phi)$ . Agora

$$f_{\#} \partial_i(\phi)(t_0, \dots, t_{n-1}) = f(\phi(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}))$$

e

$$\begin{aligned} \partial_i f_{\#}(\phi)(t_0, \dots, t_{n-1}) &= f_{\#}(\phi)(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \\ &= f(\phi(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})). \end{aligned}$$

Logo,  $f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$  é uma aplicação de cadeias e existe um homomorfismo induzido de grau zero  $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ . Note que se  $g : Y \rightarrow W$  é uma função contínua, então  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  e se  $Id : X \rightarrow X$  é a aplicação identidade, então  $Id_*$  é o homomorfismo identidade.

**Exemplo 13.** Tome  $X = x$  (um ponto). Então para cada  $p \geq 0$  existe um único  $p$ -simplexo singular  $\phi_p : \sigma_p \rightarrow X$ . Além disso, note que para  $p > 0$ ,  $\partial_i \phi_p = \phi_{p-1}$ . Então considere o complexo de cadeias

$$\cdots \rightarrow S_2(x) \rightarrow S_1(x) \rightarrow S_0(x) \rightarrow 0.$$

Cada  $S_n(x)$  é um grupo cíclico infinito gerado por  $\phi_n$ . O operador bordo é dado por:

$$\partial \phi_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \phi_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \phi_{n-1}.$$

Deste modo,  $\partial \phi_{2n-1} = 0$  e  $\partial \phi_{2n} = \phi_{2n-1}$  para  $n > 0$ . Aplicando isto ao complexo de cadeias temos que  $Z_n(X) = B_n(X)$  para  $n > 0$ . Entretanto,  $Z_0(X) = S_0(X)$  é cíclico infinito, enquanto  $B_0(X) = 0$ . Portanto, concluímos que os grupos de homologia de um ponto são dados por

$$H_n(x) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

**Definição 14.** Um espaço  $X$  é conexo por caminhos se dados  $x, y \in X$ , existe uma função contínua  $\psi : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\psi(0) = x$  e  $\psi(1) = y$ . Note que ao invés de  $[0, 1]$  poderíamos usar  $\sigma_1$ .

Suponha que  $X$  é um espaço conexo por caminhos e considere a porção do complexo de cadeias singulares de  $X$  dada por

$$S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X) \rightarrow 0.$$

Agora,  $S_0(X) = Z_0(X)$ , que pode ser visto como o grupo abeliano livre gerado pelos pontos de  $X$ . Isto é,  $Z_0(X) = F(X)$ . Portanto, um elemento  $y$  de  $Z_0(X)$  tem a forma  $y = \sum_{x \in X} n_x \cdot x$ , onde  $n_x \in \mathbb{Z}$ ,  $n_x = 0$  exceto para um número finito de  $x \in X$ .

Por outro lado,  $S_1(X)$  pode ser visto como o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto de todos os caminhos em  $X$ . Se os vértices de  $\sigma_1$  são  $v_0$  e  $v_1$  e  $\phi$  é um 1-simplexo singular em  $X$ , então  $\partial\phi = \phi(v_1) - \phi(v_0) \in Z_0(X)$ .

Defina um homomorfismo  $\alpha : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  por  $\alpha(\sum n_x \cdot x) = \sum n_x$ . Note que se  $X$  é não vazio, então  $\alpha$  é um epimorfismo. Visto que para qualquer 1-simplexo singular  $\phi$  em  $X$ ,  $\alpha(\partial\phi) = \alpha[\phi(v_1) - \phi(v_0)] = 0$ , segue que  $B_0(X)$  está contido no núcleo de  $\alpha$ .

Reciprocamente, suponha que  $n_1x_1 + \dots + n_kx_k \in Z_0(X)$  com  $\sum n_i = 0$ . Escolha qualquer ponto  $x \in X$  e note que para cada  $i$  existe um 1-simplexo singular  $\phi_i : \sigma_1 \rightarrow X$  com  $\partial_0(\phi_i) = x_i$  e  $\partial_1(\phi_i) = x$ . Tomando a 1-cadeia singular  $\sum n_i\phi_i$  em  $S_1(X)$  temos  $\partial(\sum n_i\phi_i) = \sum n_ix_i - (\sum n_i)x = \sum n_ix_i$ . Portanto, o núcleo de  $\alpha$  está contido em  $B_0(X)$ . Isto prova que  $\ker \alpha = B_0(X)$  e concluímos o seguinte:

**Proposição 15.** *Se  $X$  é um espaço conexo por caminhos não vazio, então  $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$ .*

**Definição 16.** Seja  $A$  um conjunto e suponha que para cada  $\alpha \in A$  exista um grupo abeliano dado  $G_\alpha$ . Defina um grupo abeliano  $\sum_{\alpha \in A} G_\alpha$  como segue: os elementos são funções  $f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  tais que  $f(\alpha) \in G_\alpha$  para cada  $\alpha$  e  $f(\alpha) = 0$  exceto para um número finito de  $\alpha \in A$ ; a operação é definida por  $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$ . Colocando  $g_\alpha = f(\alpha) \in G_\alpha$  escrevemos  $f = (g_\alpha : \alpha \in A)$  e chamamos os  $g_\alpha$  de componentes de  $f$ . O grupo  $\sum G_\alpha$  é a soma direta fraca dos  $G_\alpha$ 's. Se a exigência que  $f(\alpha) = 0$  exceto para um número finito de  $\alpha \in A$  é retirada, então o grupo resultante é o produto direto dos  $G_\alpha$ 's, denotado por  $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ .

Note que se  $G$  é um grupo abeliano e  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é uma família de subgrupos de  $G$  tal que  $g \in G$  tem uma representação única  $g = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha$  com  $g_\alpha \in G_\alpha$  e  $g_\alpha = 0$  exceto para um número finito de  $\alpha$ 's, então  $G$  é isomorfo a  $\sum_{\alpha \in A} G_\alpha$ .

Agora, para cada  $\alpha \in A$  suponha que temos um complexo de cadeia  $C^\alpha$

$$\dots \xrightarrow{\partial^\alpha} C_p^\alpha \xrightarrow{\partial^\alpha} C_{p-1}^\alpha \xrightarrow{\partial^\alpha} \dots$$

Defina um complexo de cadeia  $\sum_{\alpha \in A} C^\alpha$  tomando  $(\sum C^\alpha)_p = \sum C_p^\alpha$  e colocando  $\partial(c_\alpha : \alpha \in A) = (\partial^\alpha c_\alpha : \alpha \in A)$ .

**Lema 17.**  $H_k(\sum C^\alpha) \approx \sum_\alpha H_k(C^\alpha)$ .

**Prova:** Note que pela definição do complexo de cadeia  $\sum C^\alpha$  temos

$$Z_k(\sum C^\alpha) = \sum [Z_k(C^\alpha)] \quad \text{e} \quad B_k(\sum C^\alpha) = \sum [B_k(C^\alpha)].$$

Portanto

$$H_k(\sum C^\alpha) = \frac{Z_k(\sum C^\alpha)}{B_k(\sum C^\alpha)} = \frac{\sum [Z_k(C^\alpha)]}{\sum [B_k(C^\alpha)]} \approx \sum \frac{Z_k(C^\alpha)}{B_k(C^\alpha)} = \sum H_k(C^\alpha).$$

■

Seja  $X$  um espaço topológico e para  $x, y \in X$ , determine  $x \sim y$  se existe um caminho em  $X$  de  $x$  a  $y$ . Temos que  $\sim$  é uma relação de equivalência, isto é, (1)  $x \sim x$ ; (2)  $x \sim y$  e  $y \sim z$  implica  $x \sim z$ ; (3)  $x \sim y$  implica  $y \sim x$ , para todos os pontos  $x, y, z$  em  $X$ . Tal relação decompõe  $X$  numa coleção de subconjuntos, as classes de equivalência, onde  $x$  e  $y$  estão na mesma classe de equivalência se, e somente se,  $x \sim y$ . Para esta relação específica em  $X$  as classes de equivalência são chamadas componentes de caminho de  $X$ . Note que se  $x \in X$ , a componente de caminho de  $X$  contendo  $x$  é o subconjunto conexo por caminhos maximal de  $X$  contendo  $x$ .

**Proposição 18.** *Se  $X$  é um espaço e  $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$  são as componentes de caminho de  $X$ , então*

$$H_k(X) \approx \sum_{\alpha \in A} H_k(X_\alpha).$$

Esta proposição estabelece a propriedade intrínseca “aditiva” da teoria de homologia singular. Visto que as propriedades homológicas de um espaço são

completamente determinadas por aquelas de suas componentes de caminho e as propriedades homológicas de qualquer componente de caminho são independentes das propriedades de qualquer outra componente de caminho, podemos restringir nossa atenção ao estudo de espaços conexos por caminhos.

Note que segue das Proposições 18 e 15 que  $H_0(X)$  é um grupo abeliano livre cuja base está em correspondência biunívoca com as componentes de caminho de  $X$ .

**Teorema 19.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo, então  $f_* : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$  é um isomorfismo para cada  $p$ .*

**Prova:** Como  $f$  é um homeomorfismo, então  $f$  é contínua. Assim, temos que existe um homomorfismo induzido  $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ , ou seja, para cada  $p$ ,  $f_* : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$  é um homomorfismo.

Novamente por  $f$  ser um homeomorfismo, temos que  $f^{-1}$  é contínua. Logo, existe um homomorfismo induzido  $f_*^{-1} : H_*(Y) \rightarrow H_*(X)$ , ou seja, para cada  $p$ ,  $f_*^{-1} : H_p(Y) \rightarrow H_p(X)$  é um homomorfismo.

Além disso, para qualquer  $x \in H_*(X)$  e qualquer  $y \in H_*(Y)$ , temos:

$$(f_* \circ f_*^{-1})(y) = (f \circ f^{-1})_*(y) = Id_*(y) = y,$$

$$(f_*^{-1} \circ f_*)(x) = (f^{-1} \circ f)_*(x) = Id_*(x) = x.$$

Portanto,  $f_*$  é bijetora, ou seja,  $f_*$  é um isomorfismo para cada  $p$ . ■

**Teorema 20.** *Se  $X$  é um subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$ , então  $H_p(X) = 0$ , para  $p > 0$ .*

**Prova:** Suponhamos  $X \neq \emptyset$  e sejam  $x \in X$  e  $\phi : \sigma_p \rightarrow X$  um  $p$ -simplexo singular,  $p \geq 0$ . Então defina um  $(p+1)$ -simplexo singular  $\theta : \sigma_{p+1} \rightarrow X$  como segue:

$$\theta(t_0, \dots, t_{p+1}) = \begin{cases} (1 - t_0) \cdot \left( \phi \left( \frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{p+1}}{1-t_0} \right) \right) + t_0 x & \text{para } t_0 < 1, \\ x & \text{para } t_0 = 1. \end{cases}$$

Isto é, estamos colocando  $\theta(0, t_1, \dots, t_{p+1}) = \phi(t_1, \dots, t_{p+1})$  e  $\theta(1, 0, \dots, 0) = x$  e então levando segmentos de  $t_0$  até a face oposta a  $t_0$  linearmente no segmento correspondente em  $X$  (Figura 1.3). Essa construção é possível visto que  $X$  é convexo.

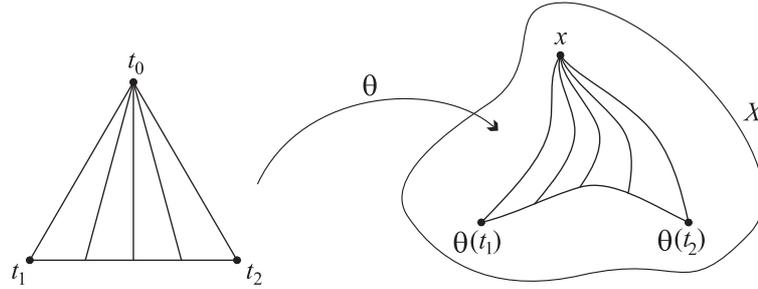


Figura 1.3: Aplicação  $\theta$ .

Por definição  $\theta$  é contínua exceto possivelmente em  $(1, 0, \dots, 0)$ . Para mostrar a continuidade neste ponto devemos mostrar que

$$\lim_{t_0 \rightarrow 1} \|\theta(t_0, \dots, t_{p+1}) - x\| = 0.$$

Agora

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow 1} \|\theta(t_0, \dots, t_{p+1}) - x\| &= \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 1} \left\| (1 - t_0) \cdot \left( \phi \left( \frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_{p+1}}{1 - t_0} \right) \right) - (1 - t_0)x \right\| \leq \\ &\leq \lim_{t_0 \rightarrow 1} (1 - t_0) \left( \left\| \phi \left( \frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_{p+1}}{1 - t_0} \right) \right\| + \|x\| \right). \end{aligned}$$

Visto que  $\phi(\sigma_p)$  é compacto,  $\left\| \phi \left( \frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_{p+1}}{1 - t_0} \right) \right\| + \|x\|$  é limitado. Logo, o limite é zero pois  $\lim_{t_0 \rightarrow 1} (1 - t_0) = 0$ , e segue que  $\theta$  é contínua.

Por construção,  $\partial_0(\theta) = \phi$ . Visto que este procedimento pode ser aplicado a qualquer  $k$ -simplexo singular,  $k \geq 0$ , existe uma extensão única a um homomorfismo  $T : S_k(X) \rightarrow S_{k+1}(X)$  tal que  $\partial_0 \circ T = Id$ . Mais geralmente temos

para  $\phi$  um  $k$ -simplexo singular,

$$\begin{aligned} \partial_i(T(\phi))(t_0, \dots, t_k) &= T(\phi)(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_k) = \\ &= (1 - t_0) \left( \phi \left( \frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_{i-1}}{1 - t_0}, 0, \frac{t_i}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_k}{1 - t_0} \right) \right) + t_0 x. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T(\partial_{i-1}(\phi))(t_0, \dots, t_k) &= (1 - t_0) \left( \partial_{i-1} \phi \left( \frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_k}{1 - t_0} \right) + t_0 x \right) = \\ &= (1 - t_0) \cdot \phi \left( \frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_{i-1}}{1 - t_0}, 0, \frac{t_i}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_k}{1 - t_0} \right) + t_0 x. \end{aligned}$$

Logo, para  $1 \leq i \leq k + 1$ ,  $\partial_i T\phi = T(\partial_{i-1}\phi)$ .

Agora seja  $\phi$  um  $k$  simplexo singular qualquer:

$$\begin{aligned} \partial T\phi &= \partial_0 T\phi + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \partial_i T(\phi) \\ &= \partial_0 T\phi + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \partial_i T(\phi) - \left[ \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i T\partial_{i-1}(\phi) + \sum_{j=0}^k (-1)^j T\partial_j \phi \right] \\ &= \phi - T\partial\phi. \end{aligned}$$

Logo, construímos um homomorfismo  $T : S_k(X) \rightarrow S_{k+1}(X)$  com a propriedade que  $\partial T + T\partial$  é o homomorfismo identidade em  $S_k(X)$ , sempre que  $k \geq 1$ .

Agora seja  $z \in Z_p(X)$ . Pelo que foi feito acima, para  $p > 0$ ,  $(\partial T + T\partial)z = z$ . Agora, visto que  $z$  é um ciclo,  $T\partial z = 0$ . Logo,  $z = \partial(Tz)$  e  $z \in B_p(X)$ . Isto implica que  $H_p(X) = 0$ , para todo  $p > 0$ . ■

A construção usada na demonstração do Teorema 20 é um caso especial de uma homotopia de cadeias entre complexos de cadeias. Suponha que  $C = \{C_i, \partial\}$  e  $C' = \{C'_i, \partial'\}$  são complexos de cadeias e  $T : C \rightarrow C'$  é um homomorfismo de grupos graduados de grau um (mas não necessariamente uma aplicação de cadeias). Então considere o homomorfismo  $\partial'T + T\partial : C \rightarrow C'$  de grau zero. Esta será uma aplicação de cadeias pois

$$\partial'(\partial'T + T\partial) = \partial'\partial'T + \partial'T\partial = \partial'T\partial = \partial'T\partial + T\partial\partial = (\partial'T + T\partial)\partial.$$

Esta aplicação de cadeias  $(\partial'T + T\partial)$  induz um homomorfismo em homologia  $(\partial'T + T\partial)_* : H_p(C) \rightarrow H_p(C')$  para cada  $p$ . Agora se  $z \in Z_p(C)$ ,

$$(\partial'T + T\partial)(z) = \partial'T(z) \in B_p(C').$$

Logo,  $(\partial'T + T\partial)_*$  é o homomorfismo trivial para cada  $p$ .

Dadas aplicações cadeia  $f, g : C \rightarrow C'$ ,  $f$  e  $g$  são cadeias homotópicas se existir um homomorfismo  $T : C \rightarrow C'$  de grau um com  $\partial'T + T\partial = f - g$ .

**Proposição 21.** *Se  $f, g : C \rightarrow C'$  são cadeias homotópicas de aplicações de cadeias, então  $f_* = g_*$  como homomorfismos de  $H_*(C)$  em  $H_*(C')$ .*

**Prova:** Isto segue diretamente visto que se  $T : C \rightarrow C'$  é uma homotopia de cadeias entre  $f$  e  $g$ , então

$$0 = (\partial'T + T\partial)_* = (f - g)_* = f_* - g_*.$$

■

Como um caso especial, suponha que  $f, g : X \rightarrow Y$  são aplicações para as quais as aplicações de cadeias induzidas  $f_#, g_# : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$  são cadeias homotópicas. Se  $T$  é uma homotopia de cadeias entre  $f_#$  e  $g_#$ , então  $T$  pode ser interpretada geometricamente da seguinte maneira.

Seja  $\phi$  um  $n$ -simplexo singular em  $X$ . Então  $T(\phi)$  pode ser vista como uma deformação contínua de  $f_#(\phi)$  em  $g_#(\phi)$ . Da Figura 1.4,  $T(\phi)$  aparece como um prisma com extremos  $f_#(\phi)$  e  $g_#(\phi)$  e lados  $T(\partial\phi)$ . Logo, é razoável que  $\partial T(\phi) = f_#(\phi) - g_#(\phi) - T(\partial\phi)$ , que é a exigência algébrica para que  $T$  seja uma homotopia de cadeias.

Se a cadeia  $c = \sum m_i \phi_i$  é um  $n$ -ciclo em  $X$ , então  $f_#(c)$  e  $g_#(c)$  são  $n$ -ciclos em  $Y$ .  $T(c)$  é uma coleção de múltiplos inteiros de tais prismas e a soma algébrica dos lados deve ser zero visto que  $\partial c = 0$ . Logo, o bordo de  $T(c)$  é a soma algébrica dos extremos dos prismas, que é  $f_#(c) - g_#(c)$ , e então  $f_#(c)$  e  $g_#(c)$  são ciclos homólogos em  $Y$ .

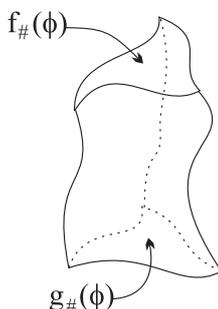


Figura 1.4: Interpretação geométrica de  $T$ .

Dados espaços  $X$  e  $Y$ , duas aplicações  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  são homotópicas se existir uma aplicação  $F : X \times I \rightarrow Y$ ,  $I = [0, 1]$ , com  $F(x, 0) = f_0(x)$  e  $F(x, 1) = f_1(x)$ ,  $\forall x \in X$ . A aplicação  $F$  é uma homotopia entre  $f_0$  e  $f_1$ . Equivalentemente, uma homotopia é uma família de aplicações  $\{f_t\}_{0 \leq t \leq 1}$  de  $X$  em  $Y$  variando continuamente com  $t$ . Temos que a relação de homotopia é uma relação de equivalência no conjunto de todas as aplicações de  $X$  em  $Y$ . É costumeiro denotar por  $[X, Y]$  o conjunto de classes de homotopia de aplicações.

**Teorema 22.** *Se  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  são aplicações homotópicas, então  $f_{0*} = f_{1*}$  como homomorfismos de  $H_*(X)$  em  $H_*(Y)$ .*

**Prova:** A idéia da demonstração é a seguinte: se  $z$  é um ciclo em  $X$ , então as imagens de  $z$  sob  $f_0$  e  $f_1$  serão ciclos em  $Y$ . Visto que  $f_0$  pode ser deformada continuamente em  $f_1$ , a imagem de  $z$  sob  $f_0$  deve admitir uma deformação contínua similar na imagem de  $z$  sob  $f_1$ . Isto deve implicar que as duas imagens são ciclos homólogos. Colocaremos agora estas idéias geométricas na atual estrutura algébrica.

Tendo em vista a Proposição 21, será suficiente mostrar que as aplicações de cadeias  $f_{0\#}, f_{1\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$  são cadeias homotópicas. Seja  $F : X \times I \rightarrow Y$  uma homotopia entre  $f_0$  e  $f_1$ . Defina aplicações  $g_0, g_1 : X \rightarrow X \times I$  por  $g_0(x) = (x, 0)$  e  $g_1(x) = (x, 1)$ . Então no diagrama cada triângulo é comutativo,

isto é,  $f_0 = F \circ g_0$  e  $f_1 = F \circ g_1$ .

Agora suponha que  $g_{0\#}$  e  $g_{1\#}$  são cadeias homotópicas como aplicações cadeia de  $S_*(X)$  em  $S_*(X \times I)$ . Isto significaria que existe um homomorfismo  $T : S_*(X) \rightarrow S_*(X \times I)$  de grau um com  $\partial T + T\partial = g_{0\#} - g_{1\#}$ . Aplicando  $F_{\#}$  a ambos os lados temos  $F_{\#}(\partial T + T\partial) = F_{\#}(g_{0\#} - g_{1\#})$  ou  $\partial(F_{\#}T) + (F_{\#}T)\partial = f_{0\#} - f_{1\#}$ . Então  $F_{\#}T$  é um homomorfismo de  $S_*(X)$  em  $S_*(Y)$  de grau um e é uma homotopia de cadeias entre  $f_{0\#}$  e  $f_{1\#}$ . Portanto, é suficiente mostrar que  $g_{0\#}$  e  $g_{1\#}$  são cadeias homotópicas.

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 g_0 \downarrow & \searrow f_0 & \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & Y \\
 g_1 \uparrow & \nearrow f_1 & \\
 X & & 
 \end{array}$$

Para o  $n$ -simplexo padrão  $\sigma_n$  denotemos por  $\tau_n \in S_n(\sigma_n)$  o elemento representado pela aplicação identidade. Note que se  $\phi : \sigma_n \rightarrow X$  é qualquer  $n$ -simplexo singular em  $X$ , então o homomorfismo induzido  $\phi_{\#} : S_n(\sigma_n) \rightarrow S_n(X)$  tem  $\phi_{\#}(\tau_n) = \phi$ . Temos que todo  $n$ -simplexo singular em  $X$  pode ser exibido como a imagem de  $\tau_n$  dessa maneira. A técnica de demonstração será então primeiro dar uma construção envolvendo  $\tau_n$  e então estender isto a todo  $S_n(X)$  pela aproximação acima.

Construímos uma homotopia de cadeias  $T$  entre  $g_{0\#}$  e  $g_{1\#}$  indutivamente na dimensão do grupo de cadeias. Para fazer o primeiro passo indutivo, suponha  $n > 0$  e para todo espaço  $X$  e inteiros  $i < n$  existe um homomorfismo  $T : S_i(X) \rightarrow S_{i+1}(X \times I)$  tal que  $\partial T + T\partial = g_{0\#} - g_{1\#}$ . Além disso, pressuponha que isto é natural no sentido que dada qualquer aplicação  $h : X \rightarrow W$  de

espaços, o seguinte diagrama comuta,  $\forall i < n$ :

$$\begin{array}{ccc} S_i(X) & \xrightarrow{T_X} & S_{i+1}(X \times I) \\ h_{\#} \downarrow & & \downarrow (h \times Id)_{\#} \\ S_i(W) & \xrightarrow{T_W} & S_{i+1}(W \times I) \end{array}$$

Para definir  $T$  nas  $n$ -cadeias de  $X$ , é suficiente definir  $T$  nos  $n$ -simplexos singulares. Então seja  $\phi : \sigma_n \rightarrow X$  um  $n$ -simplexo singular e lembre que  $\phi_{\#}(\tau_n) = \phi$ . Logo, ao definir  $T_{\sigma_n} : S_n(\sigma_n) \rightarrow S_{n+1}(\sigma_n \times I)$ , a naturalidade da construção exigirá que  $T_X(\phi) = T_X(\phi_{\#}(\tau_n)) = (\phi \times Id)_{\#}(T_{\sigma_n}(\tau_n))$ . Então para definir  $T_X$  é suficiente definir  $T_{\sigma_n}$  em  $S_n(\sigma_n)$ .

Seja  $d$  um  $n$ -simplexo singular em  $\sigma_n$  e considere a cadeia em  $S_n(\sigma_n \times I)$  dada por  $c = g_{0\#}(d) - g_{1\#}(d) - T_{\sigma_n}(\partial d)$ , que está definida pela hipótese de indução visto que  $\partial d$  está em  $S_{n-1}(\sigma_n)$ . Note que da discussão anterior,  $c$  corresponde ao bordo de um certo prisma em  $\sigma_n$ . Então

$$\begin{aligned} \partial c &= \partial g_{0\#}(d) - \partial g_{1\#}(d) - \partial T_{\sigma_n}(\partial d) \\ &= g_{0\#}(\partial d) - g_{1\#}(\partial d) - [g_{0\#}(\partial d) - g_{1\#}(\partial d) - T_{\sigma_n} \partial(\partial d)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $c$  é um ciclo de dimensão  $n$  no conjunto convexo  $\sigma_n \times I$ . Do Teorema 20, segue que  $c$  é também um bordo. Seja então  $b \in S_{n+1}(\sigma_n \times I)$  com  $\partial b = c$ . Geometricamente,  $b$  é o prisma sólido do qual  $c$  é o bordo. Defina então  $T_{\sigma_n}(d) = b$  e observe que  $\partial T(d) + T\partial(d) = g_{0\#}(d) - g_{1\#}(d)$ .

Agora, para qualquer  $n$ -simplexo singular  $\phi : \sigma_n \rightarrow X$  defina como antes  $T_X(\phi) = (\phi \times Id)_{\#} T_{\sigma_n}(\tau_n)$ . Definida nos geradores, existe uma extensão única a um homomorfismo  $T_X : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)$ . Esta construção indutiva indica a definição própria para  $T$  em 0-cadeias. Lembre que  $\sigma_0$  é um ponto e considere a cadeia  $c$  em  $S_0(\sigma_0 \times I)$  dada por  $c = g_{0\#}(\tau_0) - g_{1\#}(\tau_0)$ . Tome um 1-simplexo singular  $b$  em  $\sigma_0 \times I$  com bordo  $g_{0\#}(\tau_0) - g_{1\#}(\tau_0)$  e defina  $T_{\sigma_0}(\tau_0) = b$ . Isto define  $T$  em 0-cadeias pela mesma técnica.

Finalmente deve ser notado que na definição dada para  $T_X$  em  $n$ -cadeias de  $X$ ,  $\partial T_X + T_X \partial = g_{0\#} - g_{1\#}$  e que a construção é convenientemente natural com respeito a aplicações  $h : X \rightarrow W$ . Note que se  $\phi$  é um  $n$ -simplexo singular em  $X$ ,  $g_{0\#}(\phi) = g_{0\#}\phi_{\#}(\tau_n) = (\phi \times Id)_{\#}g_{0\#}(\tau_n)$  e analogamente  $g_{1\#}(\phi) = g_{1\#}\phi_{\#}(\tau_n) = (\phi \times Id)_{\#}g_{1\#}(\tau_n)$ . Agora considere

$$\begin{aligned} \partial T(\phi) + T\partial(\phi) &= \partial T\phi_{\#}(\tau_n) + T\partial\phi_{\#}(\tau_n) \\ &= \partial(\phi \times Id)_{\#}T(\tau_n) + T\phi_{\#}\partial(\tau_n) \\ &= (\phi \times Id)_{\#}\partial T(\tau_n) + (\phi \times Id)_{\#}T\partial(\tau_n) \\ &= (\phi \times Id)_{\#}(g_{0\#}(\tau_n) - g_{1\#}(\tau_n)) \\ &= g_{0\#}(\phi) - g_{1\#}(\phi). \end{aligned}$$

A naturalidade segue analogamente.

Portanto,  $T_X$  dá uma homotopia de cadeias entre  $g_{0\#}$  e  $g_{1\#}$ , e temos completada a demonstração de que  $f_{0*} = f_{1*}$ . ■

Note que isto generaliza a aproximação do Teorema 20. Lá usamos o fato que como  $X$  era convexo, a aplicação identidade era homotópica à aplicação que levava  $X$  no ponto  $x$ . Logo, em dimensões positivas, o homomorfismo identidade e o trivial concordam, e a homologia dimensional positiva de  $X$  é trivial.

**Definição 23.** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  aplicações de espaços topológicos. Se as composições  $f \circ g$  e  $g \circ f$  são homotópicas às suas respectivas aplicações identidade, então  $f$  e  $g$  são homotopias inversas uma da outra. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência de homotopia se  $f$  tem uma homotopia inversa; neste caso dizemos que  $X$  e  $Y$  têm o mesmo tipo de homotopia.

**Proposição 24.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência de homotopia, então  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  é um isomorfismo para cada  $n$ .

**Prova:** Se  $g$  é uma homotopia inversa para  $f$ , então pelo Teorema 22

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = Id \quad \text{e} \quad g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = Id$$

e então  $g_* = f_*^{-1}$  e  $f_*$  é um isomorfismo. ■

**Definição 25.** Suponha que  $i : A \rightarrow X$  é a aplicação inclusão de um subespaço  $A$  de  $X$ . Uma aplicação  $g : X \rightarrow A$  tal que  $g \circ i$  é a identidade em  $A$  é uma retração de  $X$  sobre  $A$ . Se além disso a composição  $i \circ g : X \rightarrow X$  é homotópica à identidade, então  $g$  é uma deformação retrátil e  $A$  é um retrato por deformação de  $X$ . Note que neste caso a inclusão  $i$  é uma equivalência de homotopia.

**Corolário 26.** Se  $i : A \rightarrow X$  é a inclusão de um retrato  $A$  de  $X$ , então  $i_* : H_*(A) \rightarrow H_*(X)$  é um monomorfismo sobre um somando direto. Se  $A$  é um retrato por deformação de  $X$ , então  $i_*$  é um isomorfismo.

**Prova:** O segundo resultado segue diretamente da Proposição 24. Para provar o primeiro, seja  $g : X \rightarrow A$  uma retração. Então  $g_* \circ i_* = (g \circ i)_* = Id_*$  é a identidade em  $H_*(A)$ . Portanto,  $i_*$  é um monomorfismo.

Defina subgrupos de  $H_*(X)$  por  $G_1 = \text{Im}(i_*)$  e  $G_2 = \text{ker}(g_*)$ . Seja  $\alpha \in G_1 \cap G_2$ , então  $\alpha = i_*(\beta)$  para algum  $\beta \in H_*(A)$  e  $g_*(\alpha) = 0$ . Entretanto  $0 = g_*(\alpha) = g_*i_*(\beta) = \beta$  e então  $\alpha = i_*(\beta)$  deve ser zero. Por outro lado, seja  $\gamma \in H_*(X)$ . Então  $\gamma = i_*g_*(\gamma) + (\gamma - i_*g_*(\gamma))$  expressa  $\gamma$  como a soma de um elemento de  $G_1$  e um elemento de  $G_2$ . Portanto,  $H_*(X) \approx G_1 \oplus G_2$  e a demonstração está completa. ■

## 5 Seqüência Exata de Homologia

**Definição 27.** Uma tripla  $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$  de grupos abelianos e homomorfismos é exata se  $\text{Im}(f) = \text{ker}(g)$ . Uma seqüência de grupos abelianos e homomorfismos  $\cdots \rightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} \cdots$  é exata se cada tripla é exata. Uma seqüência exata  $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$  é chamada exata curta. Isto é uma generalização do conceito de isomorfismo no sentido que  $h : G_1 \rightarrow G_2$  é um isomorfismo se, e somente se,  $0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{h} G_2 \rightarrow 0$  é exata.

Note que em uma seqüência exata curta como acima,  $f$  é um monomorfismo e identifica  $C$  com um subgrupo  $C' \subseteq D$ . Além disso,  $g$  é um epimorfismo com núcleo  $C'$ . Logo, a menos de isomorfismo a seqüência se reduz a  $0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} D \xrightarrow{\pi} D/C' \rightarrow 0$ .

Suponha agora que  $C = \{C_n\}$ ,  $D = \{D_n\}$  e  $E = \{E_n\}$  são complexos de cadeias e  $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$  é uma seqüência exata curta onde  $f$  e  $g$  são aplicações de cadeias de grau zero. Conseqüentemente, para cada  $p$  existe uma tripla associada de grupos de homologia  $H_p(C) \xrightarrow{f_*} H_p(D) \xrightarrow{g_*} H_p(E)$ . Agora queremos examinar precisamente o quanto isto diverge de ser exata curta.

Assim, estamos pressupondo que temos um diagrama infinito no qual as linhas são seqüências exatas curtas e cada quadrado é comutativo :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f} & D_n & \xrightarrow{g} & E_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f} & D_{n-1} & \xrightarrow{g} & E_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Seja  $z \in Z_n(E)$ , isto é,  $z \in E_n$  e  $\partial z = 0$ . Visto que  $g$  é um epimorfismo, existe  $d \in D_n$  com  $g(d) = z$ . Do fato que  $g$  é uma aplicação de cadeias temos  $g(\partial d) = \partial(g(d)) = \partial z = 0$ . A exatidão implica que  $\partial d$  está na imagem de  $f$ , então seja  $c \in C_{n-1}$  com  $f(c) = \partial d$ . Note que  $f(\partial c) = \partial f(c) = \partial(\partial d) = 0$ , e como  $f$  é um monomorfismo,  $\partial c$  deve ser zero, e  $c \in Z_{n-1}(C)$ .

A correspondência  $z \mapsto c$  de  $Z_n(E)$  em  $Z_{n-1}(C)$  não é uma função bem definida de ciclos em ciclos devido ao número de possíveis escolhas no construção. Entretanto, mostraremos agora que a correspondência associada nos grupos de homologia é um homomorfismo bem definido.

Sejam  $z, z' \in Z_n(E)$  ciclos homólogos. Então existe  $e \in E_{n+1}$  com  $\partial(e) =$

$z - z'$ . Sejam  $d, d' \in D_n$  com  $g(d) = z, g(d') = z'$ , e  $c, c' \in C_{n-1}$  com  $f(c) = \partial d, f(c') = \partial d'$ . Devemos mostrar que  $c$  e  $c'$  são ciclos homólogos.

Existe  $a \in D_{n+1}$  com  $g(a) = e$ . Pela comutatividade,  $g(\partial a) = \partial g(a) = \partial e = z - z'$ , então observemos que  $(d - d') - \partial a \in \ker(g)$ , portanto também  $(d - d') - \partial a \in \text{Im}(f)$ . Seja  $b \in C_n$  com  $f(b) = (d - d') - \partial a$ . Agora, temos  $f(\partial b) = \partial f(b) = \partial(d - d' - \partial a) = \partial d - \partial d' = f(c) - f(c') = f(c - c')$ . Visto que  $f$  é injetora, segue que  $c - c' = \partial b$  e  $c$  e  $c'$  são ciclos homólogos. Portanto, a correspondência induzida nos grupos de homologia está bem definida e então deve ser um homomorfismo.

Este homomorfismo é denotado por  $\Delta : H_n(E) \rightarrow H_{n-1}(C)$  e chamado de homomorfismo conectante para a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0.$$

**Teorema 28.** *Se  $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$  é uma seqüência exata curta de complexos de cadeias e aplicações de cadeias de grau zero, então a seqüência*

$$\dots \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_*} \dots$$

*é exata.*

É importante notar que a construção do homomorfismo conectante é convenientemente natural, isto é, se

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

é um diagrama de complexos de cadeias e aplicações de cadeias de grau zero no qual as linhas são exatas e os retângulos são comutativos, então vale a comutatividade em cada retângulo do diagrama associado

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(D) & \xrightarrow{g_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{f_*} & H_{n-1}(D) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\Delta'} & H_{n-1}(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_{n-1}(D) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Seja  $X$  um espaço topológico e  $A \subseteq X$  um subespaço. O interior de  $A$  ( $\text{Int } A$ ) é a união de todos os subconjuntos abertos de  $X$  que estão contidos em  $A$ , ou equivalentemente o subconjunto maximal de  $A$  que é aberto em  $X$ . Uma coleção  $\mathcal{U}$  de subconjuntos de  $X$  é um recobrimento de  $X$  se  $X \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ . Dada uma coleção  $\mathcal{U}$ , seja  $\text{Int } \mathcal{U}$  a coleção de interiores de elementos de  $\mathcal{U}$ . Estaremos interessados naqueles  $\mathcal{U}$  para os quais  $\text{Int } \mathcal{U}$  é um recobrimento de  $X$ .

Para um recobrimento qualquer  $\mathcal{U}$  de  $X$ , denotemos por  $S_n^{\mathcal{U}}(X)$  o subgrupo de  $S_n(X)$  gerado pelos  $n$ -simplexos singulares  $\phi : \sigma_n \rightarrow X$  para os quais  $\phi(\sigma_n)$  está contido em algum  $U \in \mathcal{U}$ . Então para cada  $i$ ,  $\text{Im}(\partial_i \phi) \subseteq \text{Im}(\phi)$  e temos o bordo total  $\partial : S_n^{\mathcal{U}} \rightarrow S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ .

Então associado com qualquer recobrimento  $\mathcal{U}$  de  $X$  existe um complexo de cadeias  $S_*^{\mathcal{U}}(X)$  e a inclusão natural  $i : S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*(X)$  é uma aplicação de cadeias. Note que se  $\mathcal{V}$  é um recobrimento de um espaço  $Y$  e  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação tal que para cada  $U \in \mathcal{U}$ ,  $f(U)$  está contido em algum  $V$  de  $\mathcal{V}$ , então existe uma aplicação de cadeias  $f_{\#} : S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{V}}(Y)$  e  $f_{\#} \circ i_X = i_Y \circ f_{\#}$ .

**Teorema 29.** *Se  $\mathcal{U}$  é uma família de subconjuntos de  $X$  tal que  $\text{Int } \mathcal{U}$  é um recobrimento de  $X$ , então  $i_* : H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)) \rightarrow H_n(X)$  é um isomorfismo para cada  $n$ .*

Este argumento caracteriza a diferença básica entre teoria de homologia e teoria de homotopia. Intuitivamente, a aproximação para provar este teorema é a seguinte. Dada uma cadeia  $c$  em  $X$  devemos construir uma cadeia  $c'$  em  $X$  tal que  $c'$  está na imagem de  $i$  e  $\partial c = \partial c'$ . Além disso, se  $c$  é um ciclo iremos querer que  $c'$  seja homólogo a  $c$ . Isto é feito “subdividindo” a cadeia  $c$  repetidamente até a cadeia resultante ser a desejada  $c'$ . A técnica de subdivisão é possível em teoria de homologia pois um  $n$ -simplexo pode ser subdividido em uma coleção de  $n$ -simplexos menores. Entretanto, a subdivisão de uma esfera não resulta em uma coleção de esferas menores. É a ausência de uma tal construção que torna o cálculo de grupos de homotopia extremamente difícil para espaços simples como uma esfera.

Para ver que a exigência que  $\text{Int}\mathcal{U}$  cobre  $X$  é essencial, sejam  $X = S^1$ ,  $x_0 \in S^1$  e  $\mathcal{U} = \{\{x_0\}, S^1 - \{x_0\}\}$ . Então qualquer cadeia  $c$  em  $S_1^{\mathcal{U}}(S^1)$  pode ser unicamente escrita como a soma de uma cadeia  $c_1$  em  $\{x_0\}$  e uma cadeia  $c_2$  em  $S^1 - \{x_0\}$ . Além disso, visto que a imagem de  $c_2$  está contida em um subconjunto compacto de  $S^1 - \{x_0\}$ ,  $c$  será um ciclo se, e somente se,  $c_1$  e  $c_2$  foram ciclos. Agora, ambos  $c_1$  e  $c_2$  devem então ser bordos também; portanto,  $H_1(S_*^{\mathcal{U}}(S^1)) = 0$ . Porém, mostraremos em breve que  $H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$ .

A primeira aplicação do Teorema 29 será o desenvolvimento de uma técnica para estudar a homologia de um espaço  $X$  em termos da homologia das componentes de um recobrimento  $\mathcal{U}$  de  $X$ . No caso não trivial mais simples, o recobrimento  $\mathcal{U}$  consiste de dois subconjuntos  $U$  e  $V$  tais que  $\text{Int } U \cup \text{Int } V = X$ . Por conveniência sejam  $A'$  o conjunto de todos os  $n$ -simplexos singulares em  $U$  e  $A''$  o conjunto de todos os  $n$ -simplexos singulares em  $V$ . Então  $S_n(U) = F(A')$ ,  $S_n(V) = F(A'')$ ,  $S_n(U \cap V) = F(A' \cap A'')$ ,  $S_n^{\mathcal{U}}(X) = F(A' \cup A'')$ . Note que existe um homomorfismo natural  $h : F(A') \oplus F(A'') \rightarrow F(A' \cup A'')$  dado por  $h(a'_j, a''_j) = a'_j + a''_j$ . Temos que  $h$  é um epimorfismo. Por outro lado, existe o homomorfismo  $g : F(A' \cap A'') \rightarrow F(A') \oplus F(A'')$  dado por  $g(b_i) = (b_i, -b_i)$ . Segue que  $g$  é um monomorfismo e  $h \circ g = 0$ . Agora suponha  $h(\sum n_i a'_i, \sum m_j a''_j) = 0$ . Isto é,  $\sum n_i a'_i + \sum m_j a''_j = 0$ . Visto que estes são grupos abelianos livres, a única maneira de isso acontecer é para cada  $n_i \neq 0$ ,  $a'_i = a''_j$  para algum  $j$  e além disso  $m_j = -n_i$ . Todos os  $m_j \neq 0$  devem aparecer desta maneira. Isto implica que todos os  $a'_i$  estão em  $A' \cap A''$  e se  $x = \sum n_i a'_i$ , então  $\sum m_j a''_j = -x$ . Portanto,  $x \in F(A' \cap A'')$  e  $g(x) = (\sum n_i a'_i, \sum m_j a''_j)$ . Isto prova que  $\ker(h) \subset \text{Im}(g)$ , e interpretando estes fatos em termos dos grupos de cadeias temos para cada  $n$  uma seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow S_n(U \cap V) \xrightarrow{g\#} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h\#} S_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0.$$

Defina um complexo de cadeias  $S_*(U) \oplus S_*(V)$  colocando  $(S_*(U) \oplus S_*(V))_n = S_n(U) \oplus S_n(V)$  e considerando o operador bordo como o bordo usual em cada componente. Então a seqüência acima se torna uma seqüência exata curta de

complexos de cadeias e aplicações de cadeias de grau zero.

## 6 Seqüência de Mayer Vietoris

Pelo Teorema 28, existe uma seqüência exata longa de grupos de homologia associada à seqüência acima

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \xrightarrow{h_*} H_n(S_*^U(X)) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Pela definição do complexo de cadeias, temos que  $H_n(S_*(U) \oplus S_*(V)) \approx H_n(U) \oplus H_n(V)$ , e pelo Teorema 29 temos  $H_n(S_*^U(X)) \approx H_n(X)$ . Incorporando estes isomorfismos à seqüência exata longa, temos estabelecida a seqüência de Mayer-Vietoris

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Note que se definirmos por

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ i \nearrow & & \searrow k \\ U \cap V & & U \cup V = X \\ j \searrow & & \nearrow l \\ & V & \end{array}$$

as respectivas aplicações inclusão, então  $g_*(x) = (i_*(x), -j_*(x))$  e  $h_*(y, z) = k_*(y) + l_*(z)$ . O homomorfismo conectante  $\Delta$  pode ser interpretado geometricamente como segue: qualquer classe de homologia  $\omega$  em  $H_n(X)$  pode ser representada por um ciclo  $c + d$  onde  $c$  é uma cadeia em  $U$  e  $d$  é uma cadeia em  $V$ . (Isto segue do Teorema 29) Então  $\Delta(\omega)$  é representado pelo ciclo  $\partial c$  em  $U \cap V$ .

A construção da seqüência de Mayer-Vietoris é natural no sentido que se  $X'$  é um espaço,  $U'$  e  $V'$  são subconjuntos com  $\text{Int}(U') \cup \text{Int}(V') = X'$ , e  $f : X \rightarrow X'$  é uma aplicação para a qual  $f(U) \subseteq U'$  e  $f(V) \subseteq V'$ , então temos comutatividade em cada retângulo do seguinte diagrama, que se estende para a direita e para a

esquerda

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_*} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(U \cap V) \\
 \downarrow f_* & & \downarrow f_* \oplus f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
 H_n(U' \cap V') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(U') \oplus H_n(V') & \xrightarrow{h'_*} & H_n(X') & \xrightarrow{\Delta'} & H_{n-1}(U' \cap V')
 \end{array}$$

**Exemplo 30.** Seja  $X = S^1$  e denotemos por  $z$  e  $z'$  os pólos norte e sul, respectivamente, e por  $x$  e  $y$  os pontos no equador (Figura 1.5). Sejam  $U = S^1 - \{z'\}$  e  $V = S^1 - \{z\}$ . Então na seqüência de Mayer-Vietoris associada a este recobrimento temos

$$H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{h_*} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_0(U) \oplus H_0(V).$$

O primeiro termo é zero visto que  $U$  e  $V$  são contráteis. Logo,  $\Delta$  é um monomorfismo e  $H_1(S^1)$  será isomorfo à  $\text{Im}(\Delta) = \ker(g_*)$ . Um elemento de  $H_0(U \cap V) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  pode ser escrito na forma  $ax + by$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros.

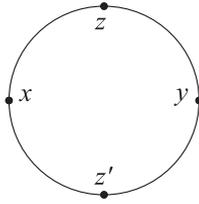


Figura 1.5:  $S^1$ .

Agora,  $g_*(ax + by) = (i_*(ax + by), -j_*(ax + by))$ . Visto que  $U$  e  $V$  são conexos por caminhos,  $i_*(ax + by) = 0$  se, e somente se,  $a = -b$  e analogamente para  $j_*$ . Logo, o núcleo de  $g_*$  é o subgrupo de  $H_0(U \cap V)$  consistindo de todos os elementos da forma  $ax - ay$ . Isto é um subgrupo cíclico infinito gerado por  $x - y$ . Portanto, concluímos que  $H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$ . Para dar geometricamente um gerador  $\omega$  para este grupo, devemos representar  $\omega$  pela soma de duas cadeias,  $c + d$ , onde  $c \in U$  e  $d \in V$ , para as quais  $\partial(c) = x - y = -\partial(d)$ . As cadeias  $c$  e  $d$  podem ser escolhidas como mostrado na Figura 1.6.

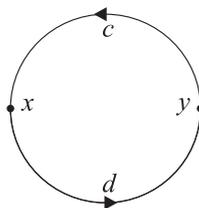


Figura 1.6: Cadeias  $c$  e  $d$  para  $S^1$ .

Para qualquer inteiro  $n > 1$ , a porção da seqüência de Mayer-Vietoris

$$H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V)$$

tem os dois extremos iguais a zero. Portanto,  $H_n(S^1) = 0$ .

Isto completa a determinação da homologia de  $S^1$ .

## 7 Homologia da Esfera

Agora procedemos indutivamente para calcular a homologia de  $S^n$ , para cada  $n$ . Relembremos que  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Da forma usual considere  $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  como todos os pontos da forma  $(x_1, \dots, x_n, 0)$ . Sob esta inclusão  $S^{n-1} \subseteq S^n$  como o “equador”. Denotemos por  $z = (0, \dots, 0, 1)$  e  $z' = (0, \dots, 0, -1)$  os pólos norte e sul de  $S^n$ . Então, pela projeção estereográfica,  $S^n - \{z\}$  e  $S^n - \{z'\}$  são homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ . Além disso,  $S^n - \{z \cup z'\}$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

**Proposição 31.**  $S^{n-1}$  é um retrato por deformação de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

**Prova:** Seja  $i : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  a aplicação inclusão. Precisamos encontrar  $g : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  tal que  $g \circ i : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  é a identidade e  $i \circ g : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  é homotópica à identidade. Tomamos  $g : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  dada por

$$g(x_1, \dots, x_n) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{\|(x_1, \dots, x_n)\|}.$$

Então, temos que  $(g \circ i)(x_1, \dots, x_n) = g[i(x_1, \dots, x_n)] = g(x_1, \dots, x_n) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{\|(x_1, \dots, x_n)\|}$ , pois  $(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$ , ou seja,  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = 1$ .

Definimos então  $F : \mathbb{R}^n - \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  por  $F(x, t) = (1-t)[(i \circ g)(x)] + tx$ . Temos  $F(x, 0) = (i \circ g)(x)$ ;  $F(x, 1) = x$ . Portanto,  $(i \circ g)$  é homotópica à identidade.

Logo,  $S^{n-1}$  é um retrato por deformação de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . ■

Sejam agora  $U = S^n - \{z\}$ ,  $V = S^n - \{z'\}$ ; temos que  $U \cap V = S^n - \{z \cup z'\}$ . Então pelas observações e pela Proposição 31, a seqüência de Mayer-Vietoris para este recobrimento se torna

$$H_m(\mathbb{R}^n) \oplus H_m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{h_*} H_m(S^n) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{g_*} H_{m-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{m-1}(\mathbb{R}^n).$$

Para  $m > 1$  os termos dos extremos são zero e assim  $\Delta$  é um isomorfismo. Para  $m = 1$  e  $n > 1$ ,  $g_*$  e  $\Delta$  devem ambos ser monomorfismos e assim  $H_1(S^n) = 0$ . Isto fornece o passo indutivo na demonstração do seguinte:

**Teorema 32.** *Para qualquer inteiro  $n \geq 0$ ,  $H_*(S^n)$  é um grupo abeliano livre com dois geradores, um em dimensão zero e um em dimensão  $n$ .*

**Corolário 33.** *Para  $n \neq m$ ,  $S^n$  e  $S^m$  não têm o mesmo tipo de homotopia.*

**Definição 34.** Defina o  $n$ -disco em  $\mathbb{R}^n$  como  $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1\}$  e note que  $S^{n-1} \subseteq D^n$  é o seu bordo.

**Corolário 35.** *Não existe retração de  $D^n$  sobre  $S^{n-1}$ .*

**Prova:** Para  $n = 1$  isto segue do fato que  $D^1$  é conexo e  $S^0$  não. Suponha  $n > 1$  e  $f : D^n \rightarrow S^{n-1}$  uma aplicação tal que  $f \circ i = Id$ , onde  $i$  é a inclusão de  $S^{n-1}$  em  $D^n$ .

Isto implica que o seguinte diagrama de grupos de homologia e homomorfismos induzidos é comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{Id} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow i_* & \nearrow f_* & \\ H_{n-1}(D^n) & & \end{array}$$

Entretanto, como  $H_{n-1}(D^n) = 0$ , isto nos dá uma fatoração da identidade em um grupo cíclico infinito através do zero, o que é impossível. Portanto, não existe tal retração  $f$ . ■

**Corolário 36 (Teorema do ponto fixo de Brouwer).** *Dada uma aplicação  $f : D^n \rightarrow D^n$ , existe  $x \in D^n$  com  $f(x) = x$ .*

**Prova:** Suponha  $f : D^n \rightarrow D^n$  sem pontos fixos. Defina uma função  $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$  como segue: para  $x \in D^n$  existe uma semi-reta bem definida começando em  $f(x)$  e passando por  $x$ . Defina  $g(x)$  como o ponto da intersecção da semi-reta com  $S^{n-1}$  (Figura 1.7). Então  $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$  é contínua e  $g(x) = x$  para todo  $x \in S^{n-1}$ . Mas a existência de tal aplicação  $g$  contradiz o Corolário 35. Portanto,  $f$  deve ter um ponto fixo. ■

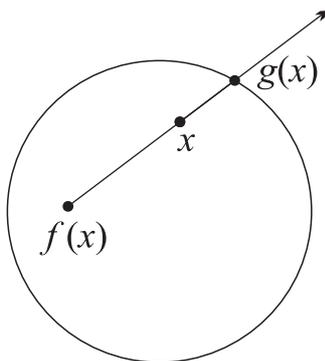


Figura 1.7:  $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$ .

## 8 O Grau de uma Aplicação

**Definição 37.** Seja  $n \geq 1$  e suponha que  $f : S^n \rightarrow S^n$  é uma aplicação. Escolha um gerador  $\alpha$  de  $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$  e note que o homomorfismo induzido por  $f$  em  $H_n(S^n)$  tem  $f_*(\alpha) = m \cdot \alpha$  para algum inteiro  $m$ . Este inteiro é independente da escolha do gerador visto que  $f_*(-\alpha) = -f_*(\alpha) = -m \cdot \alpha = m \cdot (-\alpha)$ . ■

inteiro  $m$  é o grau de  $f$ , denotado por  $d(f)$ . É freqüentemente chamado de grau de Brouwer, como resultado do trabalho de L. E. J. Brouwer. O grau de uma aplicação é uma generalização direta do “número de enrolamento” associado com uma aplicação do círculo nos números complexos diferentes de zero.

As seguintes propriedades básicas do grau de uma aplicação são conseqüências de resultados anteriores:

- (a)  $d(Id) = 1$ ;
- (b) se  $f, g : S^n \rightarrow S^n$  são aplicações,  $d(f \circ g) = d(f) \cdot d(g)$ ;
- (c)  $d(\text{aplicação constante}) = 0$ ;
- (d) se  $f$  e  $g$  são homotópicas, então  $d(f) = d(g)$ ;
- (e) se  $f$  é uma equivalência de homotopia, então  $d(f) = \pm 1$ .

Outra propriedade é que existem aplicações de qualquer grau em  $S^n$  sempre que  $n > 0$ . Uma propriedade muito mais sofisticada é o resultado de teoria de homotopia de Hopf, que é a recíproca da propriedade (d), se  $d(f) = d(g)$ , então  $f$  e  $g$  são homotópicas. Logo, o grau é um invariante algébrico completo para o estudo de classes de homotopia de aplicações de  $S^n$  em  $S^n$ .

**Proposição 38.** *Seja  $n > 0$  e defina  $f : S^n \rightarrow S^n$  por*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1}).$$

*Então  $d(f) = -1$ .*

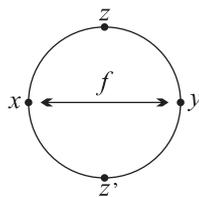


Figura 1.8: Definição de  $f$ .

**Prova:** Consideremos primeiro o caso  $n = 1$  (Figura 1.8). Como antes, sejam  $z = (0, 1)$ ,  $z' = (0, -1)$  e  $x = (-1, 0)$ ,  $y = (1, 0)$ . Os recobrimentos  $U = S^1 - \{z'\}$  e  $V = S^1 - \{z\}$  têm a propriedade que  $f(U) \subseteq U$  e  $f(V) \subseteq V$ .

Logo, pela naturalidade da seqüência de Mayer-Vietoris o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \xrightarrow{\Delta} & H_0(U \cap V) \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_{3*} \\ 0 & \longrightarrow & H_1(S^1) & \xrightarrow{\Delta} & H_0(U \cap V) \end{array}$$

tem linhas exatas e o retângulo comuta, onde  $f_3$  é a restrição de  $f$ . Recordemos que um gerador  $\alpha$  de  $H_1(S^1)$  era representado pelo ciclo  $c+d$ , onde  $\partial c = x-y = -\partial d$ , e  $\Delta(\alpha)$  é representado por  $x-y$ . Agora

$$\Delta f_*(\alpha) = f_{3*}\Delta(\alpha) = f_{3*}(x-y) = y-x = -\Delta(\alpha) = \Delta(-\alpha).$$

Visto que  $\Delta$  é um monomorfismo,  $d(f) = -1$ .

Suponha agora que a conclusão é verdadeira na dimensão  $n-1 \geq 1$  e considere  $S^{n-1} \subseteq S^n$  como antes. Tomando  $U$  e  $V$  como o complemento dos pólos sul e norte respectivamente, em  $S^n$  a inclusão  $i: S^{n-1} \rightarrow U \cap V$  é uma equivalência de homotopia. Visto que  $n \geq 2$ , o homomorfismo conectante na seqüência de Mayer-Vietoris é um isomorfismo. Logo, no diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\Delta} & H_{n-1}(U \cap V) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_{3*} & & \downarrow f_* \\ H_n(S^n) & \xrightarrow[\cong]{\Delta} & H_{n-1}(U \cap V) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

cada retângulo comuta e os homomorfismos horizontais são isomorfismos. Se  $\alpha$  é um gerador de  $H_n(S^n)$ ,

$$f_*(\alpha) = \Delta^{-1} f_{3*} \Delta(\alpha) = \Delta^{-1} i_* f_* i_*^{-1} \Delta(\alpha) = -\Delta^{-1} i_* i_*^{-1} \Delta(\alpha) = \alpha.$$

Isto dá o passo indutivo e a demonstração está completa. ■

**Corolário 39.** Se  $f : S^n \rightarrow S^n$  é dada por

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$$

então  $d(f) = -1$ .

**Prova:** Seja  $h : S^n \rightarrow S^n$  a aplicação que troca a primeira com a  $i$ -ésima coordenada. Então  $h$  é um homeomorfismo ( $h = h^{-1}$ ), e então  $d(h) = \pm 1$ . Seja  $g(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, x_{n+1})$ . Então,  $d(g) = -1$ . Portanto,

$$d(f) = d(h \circ g \circ h) = d(h)^2 d(g) = (\pm 1)^2 (-1) = (-1).$$

■

**Corolário 40.** A aplicação antipodal  $A : S^n \rightarrow S^n$  definida por

$$A(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$$
 tem  $d(A) = (-1)^{n+1}$ .

**Prova:** Pelo Corolário 39,  $A$  é a composição de  $(n+1)$  aplicações, todas de grau  $-1$ .

■

**Proposição 41.** Se  $f, g : S^n \rightarrow S^n$  são aplicações com  $f(x) \neq g(x)$  para todo  $x \in S^n$ , então  $g$  é homotópica a  $A \circ f$ .

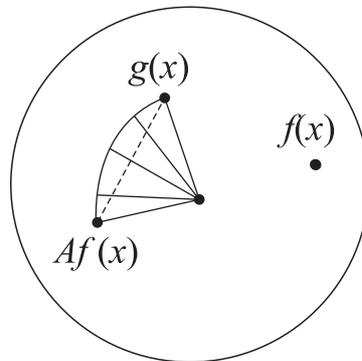


Figura 1.9: Homotopia entre  $Af(x)$  e  $g(x)$ .

**Prova:** Graficamente a idéia é a seguinte: como  $g(x) \neq f(x)$ , o segmento em  $\mathbb{R}^{n+1}$  de  $Af(x)$  até  $g(x)$  não passa pela origem. Logo, fazendo projeções da origem sobre a esfera obtemos um caminho entre  $Af(x)$  e  $g(x)$  (Figura 1.9). Estes são os caminhos que produzem a homotopia desejada. Em particular definimos uma função  $F : S^n \times I \rightarrow S^n$  por

$$F(x, t) = \frac{(1-t)Af(x) + t \cdot g(x)}{\|(1-t)Af(x) + t \cdot g(x)\|},$$

que dá a homotopia explicitamente. ■

**Corolário 42.** *Se  $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  é uma aplicação contínua, então existe  $x \in S^{2n}$  com  $f(x) = x$  ou existe  $y \in S^{2n}$  com  $f(y) = -y$ .*

**Prova:** Se  $f(x) \neq x$  para todo  $x$ , então pela Proposição 41  $f$  é homotópica a  $A$ . Por outro lado, se  $f(x) \neq -x = A(x)$  para todo  $x$ , então  $f$  é homotópica a  $A \circ A = Id$ .

Quando estas duas condições acontecem, temos  $d(A) = d(f) = d(Id)$ . Porém,  $d(A) = (-1)^{2n+1} = -1$  e  $d(Id) = 1$ , então as duas condições não podem ocorrer simultaneamente. ■

## 9 Campos de Vetores

**Definição 43.** Um campo de vetores em  $S^n$  é uma função contínua  $f : S^n \rightarrow S^n$  tal que  $x$  e  $f(x)$  são perpendiculares para cada  $x$  em  $S^n$ . Um campo de vetores  $f$  em  $S^n$  é interpretado como segue:  $f$  é uma função contínua que associa a cada vetor unitário  $x$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  um vetor unitário de  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $x$  e  $f(x)$  são perpendiculares. Se imaginarmos que o vetor  $f(x)$  é transladado de modo a ter  $x$  em  $S^n$  como ponto inicial, então  $f(x)$  deve ser tangente à esfera  $S^n$ .

Estamos agora em condições de provar nosso resultado principal:

**Teorema 44 (Teorema de Brouwer-Poincaré).** *Existe um campo de vetores em  $S^n$ ,  $n \geq 1$  se, e somente se,  $n$  é ímpar.*

**Prova:** Se  $n$  é ímpar, um campo de vetores em  $S^n$  pode ser definido por:  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{n+1}, -x_n)$ , com  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  em  $S^n$ . Temos que  $f$  é uma função contínua de  $S^n$  em  $S^n$ . Além disso,  $x \cdot f(x) = (x_1x_2 - x_1x_2) + (x_3x_4 - x_3x_4) + \dots + (x_nx_{n+1} - x_nx_{n+1}) = 0$ . Portanto,  $f$  é um campo de vetores em  $S^n$ .

Agora, se  $n$  é par, segue do Corolário 42 que não existe campo de vetores em  $S^n$ . ■

Para  $n = 2$ , este resultado pode ser visualizado da seguinte maneira: pense em cada vetor como um fio de cabelo. Encontrar um campo de vetores em  $S^2$  é equivalente a descrever um método para “pentear os fios de cabelo” tal que cada fio é tangente à esfera e suas direções variam continuamente. De acordo com o Teorema de Brouwer-Poincaré, tal penteado é impossível.

**Abstract:** In this work we present a study on the existence of vector fields on the sphere, via degree maps and Mayer-Vietoris sequence.

**Keywords:** Mayer-Vietoris sequence, vector fields, maps degree

## Referências Bibliográficas

- [1] Croom, F.H., *Basic Concepts of Algebraic Topology*, New York: Springer Verlag, 1978.
- [2] Vick, J.W., *Homology Theory. An Introduction to Algebraic Topology*, New York: Academic Press, Inc., 1973.]



# Homeomorfismos e Homotopias

Karen Regina Panzarin<sup>1</sup>

Orientador(a): Alice Kimie Miwa Libardi

**Resumo:** Há duas questões primordiais em Topologia: extensão de funções e classificação de espaços topológicos. A classificação de espaços topológicos pode ser feita através de homeomorfismos ou de uma maneira mais fraca através de homotopia ou ainda por uma relação de bordismo. Neste trabalho, tratamos da classificação através de homeomorfismos, porém mostrando a diferença entre a classificação por homeomorfismo e por homotopia através de um exemplo bastante intuitivo, porém fortemente motivador. A classificação por homeomorfismos é feita através de invariantes topológicos, como a conexão, a característica de Euler, o grupo fundamental, os grupos de homologia e de cohomologia.

**Palavras-chave:** homeomorfismo, homotopia, classificação de espaços

## 1 Homeomorfismos

**Definição 1.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Dizemos que  $f : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo se é contínua, bijetora e com inversa  $g$ , também contínua. Nesse caso, dizemos que  $X$  e  $Y$  são homeomorfos e denotamos por  $X \simeq Y$ .

Vamos ver, intuitivamente, a idéia geométrica através de um exemplo.

**Exemplo 2.** Considere as letras M e N.

**M**  $\longrightarrow$  **N**

**M**  $\longrightarrow$  **N**

---

<sup>1</sup>MEC/SESu

Em  $M$ , se tomarmos  $N$  do lado esquerdo e fizermos a correspondência com  $N$  sobre o segmento da esquerda mais a diagonal, e esticarmos o lado direito de  $M$  fazendo a correspondência com o segmento da direita de  $N$  então transformamos o  $M$  em  $N$ . De modo análogo, se tomarmos o segmento  $N$  da esquerda mais a diagonal de  $N$  e fizermos a correspondência com  $M$  sobre o lado esquerdo, e dobrarmos o segmento da direita de  $N$  fazendo a correspondência com a outra metade de  $M$ , então transformamos  $N$  em  $M$ .

**Exemplo 3.** Consideremos agora, as letras  $I$  e  $X$ . Não conseguimos um homeomorfismo de  $X$  em  $I$  ( $I$  em  $X$ ), pois, ao tirarmos o ponto central de  $X$  e o ponto central de  $I$ , teremos  $X$  com quatro segmentos, enquanto que  $I$  terá apenas dois, porém são homotópicos.

Vejamos agora, formalmente, dois exemplos de espaços homeomorfos.

**Exemplo 4.** Sejam  $X_1 = \{(x, y); (x, y) \neq (0, 0)\}$  e  $X_2 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1\}$  dois espaços. Defina  $h' : X_2 \rightarrow X_1$  por  $(x, y, z) \mapsto (xe^z, ye^z)$ , isto é, projete cada ponto  $(x, y, z) \in X_2$  no ponto  $(x, y)$  e em seguida, estique-o multiplicando suas coordenadas pela função  $e^z$ .

Para definir  $h : X_1 \rightarrow X_2$ , proceda da seguinte forma: normalize cada ponto  $(x, y) \in X_1$  para obter  $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$  e a seguir associe o ponto  $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right)$  cuja cota  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$  é obtida resolvendo-se a equação  $e^z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Disso, tem-se  $h \circ h'(x, y, z) =$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{xe^z}{\sqrt{(xe^z)^2 + (ye^z)^2}}, \frac{ye^z}{\sqrt{(xe^z)^2 + (ye^z)^2}}, \frac{1}{2} \ln((xe^z)^2 + (ye^z)^2) \right) \\ &= \left( \frac{xe^z}{e^z \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{ye^z}{e^z \sqrt{x^2 + y^2}}, \ln(e^z \sqrt{x^2 + y^2}) \right) \\ &= (x, y, \ln e^z) = (x, y, z). \end{aligned}$$

Também,

$$h' \circ h(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\ln \sqrt{x^2 + y^2}} \right) = (x, y).$$

Portanto,  $h$  é inversa de  $h'$  e como ambas são contínuas, temos que  $X_1$  e  $X_2$  são homeomorfos.

**Exemplo 5.** Consideremos agora  $f : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right),$$

onde dado  $(x, y, z) \in S^2 - \{(0, 0, 1)\}$  e considerando a reta determinada por este ponto e  $(0, 0, 1)$ , tem-se  $f(x, y, z)$  como o ponto que esta reta intercepta o plano  $xy$ . A aplicação  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{(0, 0, 1)\}$  definida por

$$g(x, y) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

é obtida de maneira similar a anterior. As aplicações  $f$  e  $g$  são contínuas, pois suas funções componentes são contínuas.

Além disso,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x, y) &= f(g(x, y)) = f\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\ &= \left( \frac{\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}}{1 - \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right)}, \frac{\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}}{1 - \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right)} \right) \\ &= \left( \frac{2x}{2}, \frac{2y}{2} \right) = (x, y), \end{aligned}$$

para qualquer  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x, y, z) &= g(f(x, y, z)) = g\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) = \\ &= \left( \frac{2\left(\frac{x}{1-z}\right)}{\left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-z}\right)^2 + 1}, \frac{2\left(\frac{y}{1-z}\right)}{\left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-z}\right)^2 + 1}, \frac{\left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-z}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-z}\right)^2 + 1} \right) = \\ &= (x, y, z) \end{aligned}$$

para qualquer  $(x, y, z) \in S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ .

E concluímos assim que  $f$  é um homeomorfismo.

Para a classificação de espaços topológicos por homeomorfismos, definimos a seguinte relação de equivalência:  $X \equiv Y \Leftrightarrow X$  e  $Y$  são homeomorfos.

## 2 Homotopias

**Definição 6.** Duas aplicações  $g, h : X \rightarrow Y$  de um espaço topológico  $X$  a um espaço topológico  $Y$  são homotópicas se existir uma família de aplicações contínuas  $f_t : X \rightarrow Y$  ( $t \in [0, 1]$ ), tais que  $f_0 = g$  e  $f_1 = h$ . Denotamos por  $g \sim h$  e dizemos que  $f_t$  ( $t \in [0, 1]$ ) é uma homotopia entre eles.

**Exemplo 7.** Intuitivamente, se considerarmos as letras  $X$  e  $Y$  e se tomarmos a parte superior de  $X$  e a levarmos na parte superior de  $Y$  e fecharmos a parte inferior de  $X$  levando-a na parte inferior de  $Y$ , estaremos transformando  $X$  em  $Y$ , por uma homotopia.

**Lema 8.** *A homotopia é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações  $Y \rightarrow X$ .*

**Prova:** [ $f \simeq f$ ] Usaremos a homotopia “constante”  $f_t = f$ ; mais precisamente,  $F : Y \times I \rightarrow X$  é definida por  $F(y, t) = f(y)$  para todo  $t$ . Ela é contínua uma vez que  $F = f \circ p_1$ .

[ $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$ ] Seja  $F : f \simeq g$ . Definimos a aplicação  $R_Y : Y \times I \rightarrow Y \times I$ , por

$$R_Y(y, t) = (y, 1 - t).$$

Ela é contínua, já que suas aplicações componentes o são. Agora,  $F \circ R_Y : g \simeq f$  é contínua já que  $F$  e  $R_Y$  são.

[ $f \simeq g$  e  $g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$ ] Seja  $F : f \simeq g$  e  $G : g \simeq h$ . Definimos uma aplicação  $F * G : Y \times I \rightarrow X$  por

$$F * G(y, t) = \begin{cases} F(y, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(y, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Primeiro observe que a função está definida duas vezes nos pontos  $(y, t)$  com  $t = 1/2$ . Mas os dois valores coincidem já que

$$F(y, 1) = g(y) = G(y, 0).$$

Claramente  $F * G$  é contínua em  $Y \times [0, \frac{1}{2}]$  e em  $Y \times [\frac{1}{2}, 1]$ . Assim, como  $F$  e  $G$  são contínuas, estão definidas em intervalos fechados e a intersecção coincide,  $F * G$  é contínua. ■

**Definição 9.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência de homotopia entre  $X$  e  $Y$  se existe uma aplicação  $g : Y \rightarrow X$  tal que as compostas  $g \circ f : X \rightarrow X$  e  $f \circ g : Y \rightarrow Y$  são homotópicas à aplicação identidade de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

**Aplicação 1.** Consideremos o conjunto das letras do alfabeto, e façamos uma classificação por homeomorfismos e por homotopias.

Por homeomorfismo, obtemos nove classes:

$$\begin{array}{lll} \{A, R\} & \{B\} & \{C, G, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z\} \\ \{D, O\} & \{E, F, T, Y\} & \{H, K\} \\ \{P\} & \{Q\} & \{X\} \end{array}$$

Por homotopia, obtemos três classes:

$$\{A, R, D, O, P\} \quad \{B, Q\} \quad \{C, I, L, M, N, S, U, V, W, Z, F, J, T, Y, G, H, K, X\}$$

Essa aplicação nos mostra que a classificação por homotopias em geral, é mais fraca do que por homeomorfismos.

**Abstract:** It has two primordial questions in Topology: extension of functions and classification of topological spaces. The classification of topological spaces can be made through homeomorphisms or in a weaker way through homotopy or by a relation of bordism. In this work, we deal with the classification through homeomorphisms, however showing the difference of the classification for homeomorphism and for homotopy through an intuitive example. The classification

for homeomorphisms can be made through topological invariants, as the connection, the characteristic of Euler, the fundamental group or the groups of homology and cohomology.

**Keywords:** homeomorphism, homotopy, classification of spaces

### Referências Bibliográficas

- [1] Libardi, A.K.M.; Vieira, J., *Invariantes Topológicos*, Notas do Curso de Especialização, 2007.
- [2] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.
- [3] Saito, H., *Algebraic Topology: An Intuitive Approach*, Iwanami Series In Modern Mathematics. American Mathematical Society, Vol 183, 1996.
- [4] Wall, C.T.C., *A Geometric Introduction to Topology*, Dover Publications, 1972.

# Teorema Fundamental da Álgebra

Northon Canevari Leme Penteado<sup>1</sup>

Orientador(a): João Peres Vieira

**Resumo:** O objetivo deste trabalho é o de demonstrar o teorema fundamental da álgebra de uma forma elegante e rápida via o uso de ferramentas da topologia algébrica.

**Palavras-chave:** homotopia, levantamento de função contínua, grau de função contínua.

## 1 Definições e Resultados

Nesta seção faremos brevemente um resumo das definições, teoremas e lema necessários para o entendimento da demonstração do teorema fundamental da álgebra dado na seção 2.

**Definição 1.** Sejam  $f, g : Y \rightarrow X$  contínuas. Se existir  $F : Y \times I \rightarrow X$  contínua tal que para todo  $y \in Y$ ,

$$F(y, 0) = f(y)$$

$$F(y, 1) = g(y),$$

então  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$  e dizemos que  $f$  e  $g$  são homotópicas.

**Definição 2.** Seja  $f : Y \rightarrow X$  uma função contínua,  $f$  é nulohomotópica se  $f$  é homotópica a  $g : Y \rightarrow X$  onde  $g$  é uma função constante.

**Definição 3.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $f : X \rightarrow S^1$  uma função contínua. Se pudermos encontrar  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = e \circ g$ , onde  $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  denota a função exponencial, então diremos que  $g$  levanta  $f$  ou  $g$  é um levantamento de

---

<sup>1</sup>PET-Matemática

$f$ . Em outras palavras, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow g & \downarrow e \\ X & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

é comutativo.

**Teorema 4.** *Qualquer função contínua  $f : I \rightarrow S^1$  tem um levantamento  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , que é único a menos de translação por um inteiro. Portanto, se  $a_0 \in \mathbb{R}$  com  $e(a_0) = f(0)$ , existe um único levantamento  $g$ , com  $g(0) = a_0$ .*

**Prova:** Vide [1], Theorem 6.2, pg. 66. ■

**Definição 5.** Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  contínua, e considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ e|I \downarrow & & \downarrow e \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

onde  $g$  é o levantamento para a função contínua  $f \circ (e|I)$  dado pelo teorema 4. Como  $e(0) = e(1) = 1$ , logo  $e(g(1)) = f(e(1)) = f(e(0)) = e(g(0))$ . Assim,  $g(1) - g(0)$  é um número inteiro, o qual é chamado de grau de  $f$ .

**Teorema 6.** *As seguintes condições sobre  $f : S^1 \rightarrow S^1$  contínua, são equivalentes:*

- i)  $f$  é nulohomotópica.
- ii)  $f$  tem grau zero.
- iii)  $f$  tem um levantamento  $f' : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Prova:** Vide [1], Theorem 6.4, pg. 68. ■

Necessitaremos também do

**Lema 7.** *Suponha que  $f : X \rightarrow S^1$  não é sobrejetiva. Então  $f$  é nulohomotópica.*

**Prova:** Vide [1], Corollary, pg. 66. ■

## 2 Teorema Fundamental da Álgebra

**Teorema 8.** *Qualquer equação polinomial não constante em  $\mathbb{C}$  tem pelo menos uma raiz.*

**Prova:** Suponhamos por absurdo que não tenha raiz e vamos chegar a uma contradição. Escrevamos o polinômio como

$$P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i, \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0.$$

Dividindo por  $a_n$ , o polinômio tem 1 como coeficiente de  $z^n$ . Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que  $a_n = 1$ .

Definamos a função  $F : S^1 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$  por

$$F(z, r) = \frac{P(rz)}{|P(rz)|}.$$

A função  $F$  está bem definida desde que  $P$  não se anula e é contínua. Além disso, se escrevermos  $f_r(z) = F(z, r)$  então  $F$  dá uma homotopia  $G : S^1 \times I \rightarrow S^1$  definida por  $G(z, t) = F(z, (1-t)r_1 + tr_2)$  entre as aplicações  $f_{r_1}$  e  $f_{r_2}$ , para quaisquer  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ . Observemos que

$$f_0(z) = F(z, 0) = \frac{P(0z)}{|P(0z)|} = \frac{a_0}{|a_0|} = \pm 1.$$

Logo  $f_0$  é constante e portanto tem grau zero.

Mostremos que para  $r$  suficientemente grande,  $f_r$  tem grau  $n$ . Isto dará uma contradição, pois como  $f_0 \simeq f_r$  então  $f_r$  teria grau zero. Tomemos

$$R > \max \left( \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|, 1 \right).$$

Então, com  $|z| = 1$  temos,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i (Rz)^i| = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| R^i |z|^i = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| R^i \leq R^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| < R^{n-1} R = R^n = |(Rz)^n|. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i \right|}{|(Rz)^n|} < 1. \quad (*)$$

Segue, em particular, que  $P(Rz)/(Rz)^n$  tem uma parte real positiva, pois

$$\frac{P(Rz)}{(Rz)^n} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i + (Rz)^n}{(Rz)^n} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i}{(Rz)^n} + 1$$

cuja parte real é  $1 + \operatorname{Re} \left( \frac{1}{(Rz)^n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i \right)$ . Mas por (\*),

$$\left| \operatorname{Re} \left( \frac{1}{(Rz)^n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i (Rz)^i \right) \right| < 1 \implies \operatorname{Re} \left( \frac{P(Rz)}{(Rz)^n} \right) > 0.$$

Portanto,

$$\frac{P(Rz)}{(Rz)^n} \left| \frac{(Rz)^n}{P(Rz)} \right| = \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|} \frac{|R|^n |z|^n}{R^n z^n} = \frac{1}{z^n} f_R(z).$$

Assim  $f_R(z)/z^n$  tem parte real positiva e norma igual a 1. Logo a aplicação  $g : S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $z \rightarrow f_R(z)/z^n$  não é sobrejetiva. Portanto, pelo lema 7, temos que  $g$  é homotopicamente nula, o que implica que  $g$  tem grau zero. Assim  $0 = \deg(g) = \deg(f_R P_{-n}) = \deg(f_R) + \deg(P_{-n}) = \deg(f_R) - n$ , onde  $P_{-n}(z) = z^{-n}$ . Logo  $\deg(f_R) = n$  e portanto chegamos a uma contradição. ■

**Abstract:** The purpose of this work is to prove the fundamental theorem of algebra of one elegant and quick form way the use of tools of the algebraic topology.

**Keywords:** homotopy, lifting of continuous map, degree of continuous map.

## Referências Bibliográficas

- [1] WALL, C.T.C., *A Geometric Introduction to Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.



# A Conexão Como Invariante Topológico

Cristiane Rodrigues, Flavia Graciani,  
Paulo R. Isler e Rodrigo de S. Bortolucci

Orientador(a): Vanderlei Marcos do Nascimento

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos como a conexão permite classificar os intervalos não degenerados da reta, a menos de homeomorfismos.

**Palavras-chave:** Conexão, Homeomorfismo e Invariante Topológico

## 1 Introdução

Aqui apresentamos os conceitos e resultados que utilizaremos, sem demonstrações. Essas podem ser encontradas em qualquer texto sobre espaços métricos, por exemplo em [1].

**Definição 1.** Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos. Um homeomorfismo de  $M$  sobre  $N$  é uma bijeção contínua  $f : M \rightarrow N$ , cuja inversa  $f^{-1} : N \rightarrow M$  também é contínua. Se existe uma tal  $f$ , diz-se que  $M$  e  $N$  são homeomorfos.

**Proposição 2.** *A composta de dois homeomorfismos é um homeomorfismo.*

No conjunto  $I$  de todos os espaços métricos, consideremos a seguinte relação binária:  $A$  e  $B$  pertencentes a  $I$  estão relacionados ( $A \simeq B$ ) se, e somente se,  $A$  e  $B$  são homeomorfos.

**Proposição 3.** *Essa relação é de equivalência.*

**Prova:** 1.  $A \simeq A$ : Para todo  $A \in I$ , temos que  $id : A \rightarrow A$  é um homeomorfismo. Logo  $A \simeq A$ .

2. Se  $A \simeq B$ , então  $B \simeq A$ :  $A \simeq B$ , então existe um homeomorfismo  $h : A \rightarrow B$ . Logo a inversa  $h^{-1} : B \rightarrow A$  é contínua e bijetora.

Falta mostrar que  $(h^{-1})^{-1}$  é contínua. Mas  $(h^{-1})^{-1} = h$ , a qual é contínua. Logo  $h^{-1} : B \rightarrow A$  é um homeomorfismo, o que implica  $B \simeq A$ .

3. Se  $A \simeq B$  e  $B \simeq C$  então  $A \simeq C$ : Temos que  $A \simeq B \Rightarrow \exists f : A \rightarrow B$  homeomorfismo e  $B \simeq C \Rightarrow \exists g : B \rightarrow C$  homeomorfismo. Definimos  $h = g \circ f : A \rightarrow C$ . Mas  $h : A \rightarrow C$  é a composta de homeomorfismos, então, pela Proposição 2,  $h$  também é um homeomorfismo. Logo  $A \simeq C$ . ■

**Proposição 4.** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos,  $f : M \rightarrow N$  um homeomorfismo. Se retirarmos um conjunto finito de pontos do domínio e seus correspondentes do contra-domínio obteremos*

$$g : M - \{a, b, \dots, k\} \rightarrow N - \{f(a), f(b), \dots, f(k)\}$$

*homeomorfismo, onde  $g = f|_{M - \{a, b, \dots, k\}}$ .*

**Proposição 5.** *Em um espaço vetorial normado, duas bolas abertas são homeomorfas.*

**Definição 6.** Um espaço métrico  $M$  é *conexo* se o fato:  $M = A \cup B$ , onde  $A$  e  $B$  são abertos disjuntos, implicar  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ .

**Proposição 7.** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos e  $f : M \rightarrow N$  um homeomorfismo.  $M$  é conexo se, e somente se,  $N$  é conexo.*

**Teorema 8.** *Todos os intervalos de  $\mathbb{R}$ , e apenas eles, são subespaços conexos.*

## 2 Teorema Principal

**Teorema 9.** *Os intervalos não degenerados da reta, com a métrica usual são classificados nas seguintes classes de equivalência.*

$$I_1 = \{(a, b), (a, +\infty), (-\infty, b), (-\infty, +\infty); a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$I_2 = \{[a, b), (a, b], [a, +\infty), (-\infty, b]; a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$I_3 = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Isto significa que os intervalos de cada grupo são homeomorfos entre si, mas nenhum deles é homeomorfo a um intervalo de outro grupo.

**Prova:** Mostremos que quaisquer  $A$  e  $B \in I_1$  são homeomorfos:

Passo 1: Sejam  $(a, +\infty), (-\infty, +\infty) \in I_1$ . Tomemos:  $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow (a, +\infty)$ , onde  $f(t) = a + e^t$ ,  $\forall t \in (-\infty, +\infty)$  e  $g : (a, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ , onde  $g(y) = \ln(y - a)$ ,  $\forall y \in (a, +\infty)$ .

Observemos que  $f$  e  $g$  são contínuas pois as funções  $e$  e  $\ln$  são contínuas. Mostremos, então, que  $f$  e  $g$  são inversas uma da outra:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f(\ln(y - a)) = a + e^{\ln(y - a)} = a + y - a = y \\(g \circ f)(t) &= g(a + e^t) = \ln(a + e^t - a) = \ln(e^t) = t\end{aligned}$$

Portanto  $f$  é homeomorfismo.

Passo 2: Sejam  $(a, b), (-\infty, +\infty) \in I_1$ .

Sabemos que existe  $f : (a, b) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  homeomorfismo, pela Proposição 5.

Consideremos,  $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ , onde  $g(t) = \tan t$ . Onde  $g$  é contínua, bijetora e  $g^{-1} = \arctan$  também é contínua. Logo  $g$  é um homeomorfismo.

Tomemos  $h = g \circ f : (a, b) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ . Sendo  $h$  composta de dois homeomorfismos,  $h$  é homeomorfismo.

Passo 3: Sejam  $(a, b), (a, +\infty) \in I_1$ .

Já vimos em 2 que  $(a, b)$  é homeomorfo a  $(-\infty, +\infty)$  e em 1 que  $(-\infty, +\infty)$  é homeomorfo a  $(a, +\infty)$ . Logo pela transitividade  $(a, b)$  é homeomorfo a  $(a, +\infty)$ .

Mostremos agora que quaisquer  $A$  e  $B \in I_2$  são homeomorfos:

Passo 1: Primeiramente mostremos que  $[a, b]$  é homeomorfo a  $(a, b]$ . Tomemos  $\varphi : [a, b] \rightarrow (a, b]$ , onde  $\varphi(t) = a + b - t \forall t \in [a, b]$ , e também  $\psi : (a, b] \rightarrow [a, b]$ , onde  $\psi(v) = a + b - v \forall v \in (a, b]$ . Ambas são contínuas, já que são lineares, e como

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(v) &= \varphi(a + b - v) = a + b - a - b + v = v, \\(\psi \circ \varphi)(t) &= \psi(a + b - t) = a + b - a - b + t = t,\end{aligned}$$

temos que  $\varphi$  e  $\psi$  são bijetoras.

Passo 2: Agora, mostremos que  $[a, b]$  é homeomorfo a  $[a, +\infty)$ . Tomemos

$$\begin{aligned}\alpha : [a, b] &\rightarrow [a, +\infty), & \alpha(t) &= a + \frac{t-a}{b-t}, \quad \forall t \in [a, b), \\ \beta : [a, +\infty) &\rightarrow [a, b], & \beta(y) &= \frac{a}{1+y-a} + \frac{b(y-a)}{1+y-a}, \quad \forall y \in [a, +\infty).\end{aligned}$$

Temos que  $\alpha$  e  $\beta$  são contínuas pois  $\alpha$  e  $\beta$  são somas de quocientes de funções contínuas. Falta mostrar que uma é a inversa da outra.

$$\begin{aligned}(\alpha \circ \beta)(y) &= \alpha \left( \frac{a}{1+y-a} + \frac{b(y-a)}{1+y-a} \right) \\ &= a + \frac{\left( \frac{a}{1+y-a} \right) + \left( \frac{b(y-a)}{1+y-a} \right) - a}{b - \left( \frac{a}{1+y-a} + \frac{b(y-a)}{1+y-a} \right)} \\ &= a + \frac{\left( \frac{a + b(y-a) - a(1+y-a)}{1+y-a} \right)}{\left( \frac{b(1+y-a) - a - b(y-a)}{1+y-a} \right)} \\ &= a + \frac{(b-a)(y-a)}{b-a} = a + y - a = y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\beta \circ \alpha)(t) &= \beta \left( a + \frac{t-a}{b-t} \right) = \frac{a + b \left( a + \frac{t-a}{b-t} - a \right)}{1 + a + \left( \frac{t-a}{b-t} \right) - a} = \\ &= \frac{a + \left( \frac{b(t-a)}{b-t} \right)}{\frac{(b-t)(t-a)}{(b-t)}} = \frac{a(b-t) + b(t-a)}{(b-a)} = \frac{(b-a)t}{(b-a)} = t\end{aligned}$$

Passo 3:  $(-\infty, b]$  é homeomorfo a  $(a, b]$ : Para esta demonstração tomemos

$$\begin{aligned}\varphi : (-\infty, b] &\rightarrow (a, b], & \varphi(y) &= \frac{b + a(y-b)}{1+y-b}, \quad \forall y \in (-\infty, b] \\ \lambda : (a, b] &\rightarrow (-\infty, b], & \lambda(x) &= b + \frac{(b-x)}{(a-x)}, \quad \forall x \in (a, b]\end{aligned}$$

Temos que  $\varphi$  e  $\lambda$  são contínuas<sup>1</sup>, uma é a inversa da outra.<sup>2</sup>

Do mesmo modo mostramos para os demais casos os homeomorfismos.

Mostremos que  $[a, b]$  não é homeomorfo a nenhum  $A \in I_1$ .

Passo 1: Suponha que  $[a, b]$  é homeomorfo a  $(a, b) \in I_1$ . Então existe  $f : [a, b] \rightarrow (a, b)$  um homeomorfismo. Pelo Teorema 8,  $[a, b]$  e  $(a, b)$  são conexos. Pela Proposição 4 existe  $g : [a, b] - \{a\} \rightarrow (a, b) - \{f(a)\}$  homeomorfismo. Mas  $(a, b)$  é conexo e  $(a, b) - \{f(a)\}$  não é conexo.<sup>3</sup> Logo tal  $g$  não pode existir.

Passo 2: Analogamente mostramos para os demais  $A_s \in I_1$ .

Mostremos que  $[a, b]$  não é homeomorfo a nenhum  $B \in I_2$ .

Passo 1: Suponha que  $[a, b]$  é homeomorfo a  $[a, b) \in I_2$ . Então existe  $f : [a, b] \rightarrow [a, b)$  homeomorfismo. Analisemos dois casos:

**1)**  $f(a) = a$ : Pela Proposição 4, existe  $g : [a, b] - \{a\} \rightarrow [a, b) - \{f(a)\} = (a, b)$  homeomorfismo. Também pela Proposição 4 existe  $h : [a, b] - \{b\} \rightarrow (a, b) - \{g(b)\}$  homeomorfismo. Mas isto não pode acontecer, pois  $(a, b)$  é conexo e  $(a, b) - \{g(b)\}$  não.

**2)**  $f(a) \neq a$ : Pela Proposição 4, existe  $g : [a, b] - \{a\} \rightarrow [a, b) - \{f(a)\}$  homeomorfismo. Mas isto não pode acontecer, pois  $[a, b]$  é conexo e  $[a, b) - \{f(a)\}$  não.

Passo 2: Analogamente mostramos para os demais  $B \in I_2$ .

**Não há homeomorfismo entre  $I_1$  e  $I_2$ :** Se os elementos de  $I_1$  e os elementos de  $I_2$  estivessem numa mesma classe, isto implicaria todos os elementos de  $I_1$  e  $I_2$  serem homeomorfos. Mostraremos que isto não ocorre, ou seja, os intervalos da forma  $(a, b)$  e  $[a, b)$  não são homeomorfos e, portanto, nenhum elemento do primeiro conjunto é homeomorfo a um elemento do outro conjunto.

Suponha que  $[a, b) \simeq (a, b)$ , isto é, existe  $f : [a, b) \rightarrow (a, b)$  homeomorfismo.

<sup>1</sup>Pelo fato de serem somas e quocientes de funções contínuas.

<sup>2</sup>Omitiremos a demonstração pois ela se dá nos mesmos moldes do item 2.

<sup>3</sup>A não conexidade de  $(a, b) - \{f(a)\}$  se dá ao fato de que  $(a, b) - \{f(a)\} = (a, f(a)) \cup (f(a), b)$ , com  $(a, f(a)) \cap (f(a), b) = \emptyset$ ,  $(a, f(a)) \neq \emptyset$  e  $(f(a), b) \neq \emptyset$ . A garantia de  $f(a) \in (a, b)$  se dá ao fato de supormos  $f$  bijetora.

Então existe  $g : [a, b] - \{a\} \rightarrow (a, b) - \{f(a)\}$  homeomorfismo. Porém  $[a, b] - \{a\} = (a, b)$  é conexo, pelo Teorema 8, mas  $(a, b) - \{f(a)\}$  não é conexo. Logo, pela Proposição 7 tal homeomorfismo não pode existir.

Portanto os elementos de  $I_1$  e  $I_2$  não podem pertencer a mesma classe. ■

Este método, de remover um número finito de pontos, para mostrar que certos espaços não são homeomorfos, funciona apenas em casos simples. Situações mais sutis necessitam de invariantes mais sofisticados. Por exemplo, no caso de dois discos,  $A$  e  $B$ , onde  $A$  é fechado e  $B$  é aberto, usamos a compacidade para mostrar que estes discos não são homeomorfos.

**Abstract:** In this work we will show how the connection allows us to give a classification of all non-degenerate intervals, up to homeomorphisms.

**Keywords:** connection, homeomorphism, topological invariant

## Referências Bibliográficas

- [1] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Edgard Blücher, 1977.

# Introdução à Dinâmica na Vizinhança do Ponto Lagrangeano $L_1$

João Paulo Cerri<sup>1</sup>

Orientador(a): Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

**Resumo:** O objetivo deste trabalho é o estudo das técnicas de sistemas dinâmicos na vizinhança dos pontos de equilíbrio instáveis. Em particular, vamos apresentar a obtenção da Hamiltoniana do sistema dinâmico na vizinhança do ponto de equilíbrio instável  $L_1$ . Isto será feito numa série de potências através dos Polinômios de Legendre. Mostraremos a existência de uma conveniente forma de recorrência, a qual permite escrever a Hamiltoniana numa forma muito confortável.

**Palavras-chave:** Pontos Lagrangeanos, Ponto de Equilíbrio Instável  $L_1$ , Problema Restrito dos 3 Corpos, Hamiltoniana na Vizinhança de  $L_1$ .

## Introdução

O Problema Restrito dos Três Corpos (PRTC) estuda o movimento de uma partícula de massa infinitesimal sob a ação do campo gravitacional de dois corpos (corpos primários), que se movem em órbita kepleriana em torno do centro de massa do sistema. A partícula infinitesimal não afeta o movimento dos dois corpos, porém tem seu movimento afetado por eles. Apesar de tratar-se de um problema de simples formulação matemática, isso não significa que este apresente uma solução analítica. Porém, soluções particulares (soluções estacionárias) podem ser obtidas. Num sistema girante de coordenadas podemos demonstrar a existência de 5 soluções de equilíbrio:  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  e  $L_5$ , os chamados Pontos Lagrangeanos do sistema. Duas destas soluções de equilíbrio,  $L_4$  e  $L_5$ , são estáveis e  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são instáveis.

---

<sup>1</sup>Bolsista PET/MEC-SESU

## 1 Expansão da Hamiltoniana

Nesta seção descreveremos os detalhes da obtenção da Hamiltoniana em termos dos Polinômios de Legendre. Inicialmente, faremos a expansão das equações do movimento em termos dos Polinômios de Legendre, para em seguida escrevermos a Hamiltoniana na forma desejada. O método como estes cálculos foram feitos encontram-se nas referências [5], [7], [8] e [9]. Alguns dos cálculos serão apresentados da maneira mais detalhada possível. O Ponto Lagrangeano aqui considerado será  $L_1$ .

Inicialmente, trasladamos a origem do sistema de coordenadas sinódico para o Ponto de Equilíbrio em questão. No caso,  $L_1$ . Tomemos  $\gamma_1$  a distância entre o Ponto de Equilíbrio  $L_1$  e o corpo primário de menor massa. Observamos que este valor é dado pela única solução positiva da Quíntica de Euler.

A Quíntica de Euler para os Pontos Lagrangeanos  $L_1$  e  $L_2$  é dada por:

$$\gamma_j^5 \pm (\mu - 3)\gamma_j^4 + (3 - 2\mu)\gamma_j^3 - \mu\gamma_j^2 \pm 2\mu\gamma_j - \mu = 0, \quad (1.1)$$

para  $L_j$  onde  $j = 1, 2$ .

Observamos que o sinal superior na equação acima corresponde ao Ponto Lagrangeano  $L_1$  e o sinal inferior ao Ponto Lagrangeano  $L_2$ . Estes dois polinômios podem ser solucionados numericamente através do Método de Newton.

Redimensionemos as variáveis de tal maneira que a distância entre o corpo primário de menor massa e a nova origem do sistema de coordenadas seja unitária. Ou seja, a distância entre o corpo primário de menor massa e o Ponto Lagrangeano  $L_1$  seja unitária.

As velhas variáveis escritas em função das novas são dadas por:

$$\begin{aligned} x &= -\gamma_j x' + \mu + c \\ y &= -\gamma_j y' \\ z &= \gamma_j z' \end{aligned} \quad (1.2)$$

para  $j = 1, 2$ , onde  $c = -1 + \gamma_1$  para  $L_1$  e  $c = -1 - \gamma_2$  para  $L_2$ .

Faremos agora a expansão das distâncias  $r_1^{-1}$  e  $r_2^{-1}$  em série de potências. De forma geral temos que  $r^{-1}$  é dado por:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x' - A)^2 + (y' - B)^2 + (z' - C)^2}}, \quad (1.3)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes.

Consideremos o desenvolvimento abaixo:

$$(x' - A)^2 + (y' - B)^2 + (z' - C)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2(Ax' + By' + Cz') + A^2 + B^2 + C^2.$$

Tomando

$$\rho = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad \alpha = Ax' + By' + Cz', \quad D^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

temos que:

$$(x' - A)^2 + (y' - B)^2 + (z' - C)^2 = \rho^2 - 2\alpha + D^2.$$

Logo:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x' - A)^2 + (y' - B)^2 + (z' - C)^2}} = \left(\rho^2 - 2\alpha + D^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.4)$$

Supondo que temos sempre  $D^2 \neq 0$  e  $\rho^2 \neq 0$ , podemos escrever então:

$$\left(\rho^2 - 2\alpha + D^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left[D^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{D^2} + \frac{\rho^2}{D^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|D|} \left[1 - \frac{\rho}{D} \left(\frac{2\alpha}{D\rho} - \frac{\rho}{D}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Denotando

$$t = \frac{\alpha}{D\rho}$$

e reescrevendo a equação acima, obtemos que:

$$\left(\rho^2 - 2\alpha + D^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|D|} \left[1 - \frac{\rho}{D} \left(2t - \frac{\rho}{D}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|D|} \left(1 - 2t\frac{\rho}{D} + \frac{\rho^2}{D^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Logo:

$$\left(\rho^2 - 2\alpha + D^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|D|} \left(1 - 2t\frac{\rho}{D} + \frac{\rho^2}{D^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Impondo na equação acima que  $|\frac{\rho}{D}| < 1$ , observamos que o lado direito da igualdade trata-se da função geradora dos Polinômios de Legendre multiplicada por um fator constante, ou seja,  $\frac{1}{|D|}$ . Sabemos que a função geradora para os Polinômios de Legendre é dada por:

$$g(y, r) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2yr + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(y)r^n, \quad |r| < 1.$$

Identificando os termos

$$y = t = \frac{\alpha}{D\rho} \quad \text{e} \quad r = \frac{\rho}{D}$$

e fazendo as substituições, obtemos:

$$\left(\rho^2 - 2\alpha + D^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|D|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n\left(\frac{\alpha}{D\rho}\right). \quad (1.5)$$

Das equações (1.4) e (1.5) tiramos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{\sqrt{(x' - A)^2 + (y' - B)^2 + (z' - C)^2}} \\ &= \frac{1}{|D|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n\left(\frac{\alpha}{D\rho}\right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Impondo  $D > 0$  na equação (1.6) concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{\sqrt{(x' - A)^2 + (y' - B)^2 + (z' - C)^2}} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n\left(\frac{Ax' + By' + Cz'}{D\rho}\right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde  $P_n$  é o Polinômio de Legendre de grau  $n$ .

A equação acima é a expansão em série de potências da distância  $r^{-1}$ .

Fazendo uso da equação (1.7), obteremos agora as expansões em série de potências de  $r_1^{-1}$  e  $r_2^{-1}$  para o Ponto Lagrangeano  $L_1$ .

Consideremos as mudanças de variáveis dadas em (1.2) para o Ponto Lagrangeano  $L_1$ , ou seja:

$$\begin{aligned}x &= -\gamma_1 x' + \mu - 1 + \gamma_1 \\y &= -\gamma_1 y' \\z &= \gamma_1 z'\end{aligned}\tag{1.8}$$

Lembrando que  $\gamma_1 \neq 0$ , pois trata-se da única solução positiva da Quíntica de Euler, ao substituírmos as mudanças de variáveis acima nas equações de  $r_1$  e  $r_2$  identificamos as constantes  $A_1, B_1, C_1, D_1$  e  $A_2, B_2, C_2, D_2$  de  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente.

As expansões de  $r_1^{-1}$  e  $r_2^{-1}$ , fazendo uso da equação (1.7), são dadas então por:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1} \right)^{n+1} \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right)\tag{1.9}$$

e

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right).\tag{1.10}$$

Foram obtidas então as expansões em série de potências de  $r_1^{-1}$  e  $r_2^{-1}$ .

Consideremos agora as equações do movimento do PRTC:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z},\tag{1.11}$$

onde

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

Introduzindo nas equações acima, as mudanças de variáveis (1.8) juntamente

com as expansões em série de potências de  $r_1$  e  $r_2$ , obteremos:

$$\begin{aligned} \ddot{x}' - 2\dot{y}' - (1 + c_2)x' &= \frac{\partial}{\partial x'} \sum_{n \geq 3}^{\infty} c_n \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right) \\ \ddot{y}' + 2\dot{x}' + (c_2 - 1)y' &= \frac{\partial}{\partial y'} \sum_{n \geq 3}^{\infty} c_n \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right) \\ \ddot{z}' + c_2 z' &= \frac{\partial}{\partial z'} \sum_{n \geq 3}^{\infty} c_n \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde  $\rho^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ ,  $P_n$  é o Polinômio de Legendre de grau  $n$  e os coeficientes  $c_n$  são funções de  $\mu$  e dados pela seguinte expressão:

$$c_n(\mu) = \frac{1}{\gamma_1^3} \left[ \mu + (-1)^n \frac{(1 - \mu)}{(1 - \gamma_1)^{n+1}} \gamma_1^{n+1} \right]. \quad (1.13)$$

É muito importante observar que o lado esquerdo das equações (1.12) contém os termos lineares enquanto que o lado direito contém os termos não lineares.

As equações de (1.12) são as equações do movimento expressas em termos dos Polinômios de Legendre. Os termos não lineares foram expandidos em série de potências.

Faremos os cálculos para a obtenção da terceira equação de (1.12) e também a dedução da expressão para  $c_n(\mu)$ . Os procedimentos para os cálculos da primeira e da segunda expressão de (1.12) se dão de forma inteiramente análoga ao que será realizado aqui. E, portanto não serão apresentados.

Consideremos a equação:

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Como

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r_1} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r_2} \right)$$

então a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\ddot{z} = (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r_1} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r_2} \right).$$

Introduzindo as mudanças de variáveis dada por (1.8), temos:

$$\begin{cases} x = \gamma_1 x' + \mu - 1 + \gamma_1 \\ y = \gamma_1 y' \\ z = \gamma_1 z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \gamma_1 \dot{x}' \\ \dot{y} = \gamma_1 \dot{y}' \\ \dot{z} = \gamma_1 \dot{z}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \gamma_1 \ddot{x}' \\ \ddot{y} = \gamma_1 \ddot{y}' \\ \ddot{z} = \gamma_1 \ddot{z}' \end{cases}$$

Observamos que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'}.$$

Como

$$\frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_1}$$

então temos que:

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r_1} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r_2} \right) \\ \ddot{z}' &= \frac{1}{\gamma_1^2} \left[ (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{1}{r_1} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{1}{r_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

A equação do movimento em termos da nova variável  $z'$  é dada por:

$$\ddot{z}' = \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial}{\partial z'} \left[ (1 - \mu) \frac{1}{r_1} + \mu \frac{1}{r_2} \right]. \quad (1.14)$$

Escreveremos a partir de agora a expressão

$$(1 - \mu) \frac{1}{r_1} + \mu \frac{1}{r_2}$$

em termos dos Polinômios de Legendre.

Substituindo as expansões de  $r_1^{-1}$  e  $r_2^{-1}$ , dadas pelas equações (1.9) e (1.10), na equação acima, resulta:

$$(1 - \mu) \frac{1}{r_1} + \mu \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\gamma_1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1 - \mu) \gamma_1^{n+1}}{(1 - \gamma_1)^{n+1}} \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right) \right\}.$$

Em uma forma mais simplificada, temos:

$$(1 - \mu) \frac{1}{r_1} + \mu \frac{1}{r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} \left[ (-1)^n \frac{(1 - \mu) \gamma_1^{n+1}}{(1 - \gamma_1)^{n+1}} + \mu \right] \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right). \quad (1.15)$$

Substituindo a equação (1.15) na equação (1.14), obtemos:

$$\ddot{z}' = \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial}{\partial z'} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} \left[ (-1)^n \frac{(1 - \mu) \gamma_1^{n+1}}{(1 - \gamma_1)^{n+1}} + \mu \right] \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right) \right\}.$$

Ou melhor:

$$\ddot{z}' = \frac{\partial}{\partial z'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1^3} \left[ (-1)^n \frac{(1-\mu)\gamma_1^{n+1}}{(1-\gamma_1)^{n+1}} + \mu \right] \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right). \quad (1.16)$$

Definindo:

$$c_n(\mu) = \frac{1}{\gamma_1^3} \left[ (-1)^n \frac{(1-\mu)\gamma_1^{n+1}}{(1-\gamma_1)^{n+1}} + \mu \right],$$

reescrevemos a equação (1.16) na forma:

$$\ddot{z}' = \frac{\partial}{\partial z'} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\mu) \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right). \quad (1.17)$$

Expandido os três primeiros termos da série acima, temos:

$$\ddot{z}' = \frac{\partial}{\partial z'} \left\{ c_0(\mu) P_0 \left( \frac{x'}{\rho} \right) + c_1(\mu) \rho P_1 \left( \frac{x'}{\rho} \right) + c_2(\mu) \rho^2 P_2 \left( \frac{x'}{\rho} \right) + \sum_{n=3}^{\infty} c_n(\mu) \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right) \right\}. \quad (1.18)$$

Para  $n = 0, 1$  e  $2$  os Polinômios de Legendre  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são dados por:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Fazendo  $x = \frac{x'}{\rho}$ , temos:

$$P_0 \left( \frac{x'}{\rho} \right) = 1, \quad P_1 \left( \frac{x'}{\rho} \right) = \frac{x'}{\rho}, \quad P_2 \left( \frac{x'}{\rho} \right) = \frac{1}{2} \left[ 3 \left( \frac{x'}{\rho} \right)^2 - 1 \right].$$

Substituindo  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  acima, na equação (1.18), obtemos:

$$\ddot{z}' = \frac{\partial}{\partial z'} \left\{ c_0(\mu) + c_1(\mu)x' + \frac{3}{2}c_2(\mu)x' - \frac{1}{2}c_2(\mu)\rho^2 + \sum_{n=3}^{\infty} c_n(\mu)\rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right) \right\}.$$

Lembrando que  $\rho^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)$  e  $c_n(\mu)$  é uma constante dada em termos de  $\mu$  e  $\gamma_1$ , ao calcularmos a derivada obtemos:

$$\ddot{z}' = -c_2 z' + \frac{\partial}{\partial z'} \sum_{n=3}^{\infty} c_n \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right).$$

Portanto,

$$\ddot{z}' + c_2 z' = \frac{\partial}{\partial z'} \sum_{n=3}^{\infty} c_n \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right). \quad (1.19)$$

Lembremos que, anteriormente, definindo os momentos como sendo

$$p_x = \dot{x} - y, \quad p_y = \dot{y} + x, \quad p_z = \dot{z},$$

foi possível obter a forma Hamiltoniana, abaixo, para o PRTC:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}.$$

A forma Hamiltoniana acima também pode ser escrita em termos dos Polinômios de Legendre. Isso possibilitará em seguida gerar através das formas de recorrência para os Polinômios de Legendre a sua parte não linear. Ou seja, a parte não linear da Hamiltoniana será obtida através de fórmulas de recorrência para os Polinômios de Legendre. A Hamiltoniana estará a partir daí numa forma adequada para o desenvolvimento computacional.

Observando que

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

e lembrando de cálculos anteriores que

$$\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1} \left[ (-1)^n \frac{(1-\mu)\gamma_1^{n+1}}{(1-\gamma_1)^{n+1}} + \mu \right] \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right),$$

então através da introdução das mudanças de variáveis, equações de (1.8), na forma Hamiltoniana acima, obtemos:

$$H = \frac{1}{2}(p_{x'}^2 + p_{y'}^2 + p_{z'}^2) + y'p_{x'} - x'p_{y'} - \sum_{n \geq 2}^{\infty} c_n \rho^n P_n \left( \frac{x'}{\rho} \right) + K, \quad (1.20)$$

onde  $K$  é uma constante envolvendo  $\mu$  e  $\gamma_1$ .

A equação (1.20) é chamada de Forma Hamiltoniana Expandida do PRTC.

Observamos que a parte não linear da forma Hamiltoniana acima pode ser gerada confortavelmente através das fórmulas de recorrência para os Polinômios de Legendre.

Definimos:

$$T_n(x', y', z') = \rho^n P_n\left(\frac{x'}{\rho}\right). \quad (1.21)$$

Consideremos a seguinte fórmula de recorrência para os Polinômios de Legendre:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (1.22)$$

Tomando  $n = m - 1$  e substituindo na equação (1.22), obtemos:

$$mP_m(x) - (2m-1)xP_{m-1}(x) + (m-1)P_{m-2}(x) = 0, \quad \text{para } m \geq 2. \quad (1.23)$$

Fazendo  $x = \frac{x'}{\rho}$  na equação (1.23) e manipulando-a de forma conveniente, temos:

$$P_m\left(\frac{x'}{\rho}\right) = \frac{(2m-1)}{m}\left(\frac{x'}{\rho}\right)P_{m-1}\left(\frac{x'}{\rho}\right) - \frac{(m-1)}{m}P_{m-2}\left(\frac{x'}{\rho}\right), \quad \text{para } m \geq 2. \quad (1.24)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (1.24) por  $\rho^m$  e simplificando, obtemos:

$$\rho^m P_m\left(\frac{x'}{\rho}\right) = \frac{(2m-1)}{m}x'\rho^{m-1}P_{m-1}\left(\frac{x'}{\rho}\right) - \frac{(m-1)}{m}\rho P_{m-2}\left(\frac{x'}{\rho}\right), \quad \text{para } m \geq 2. \quad (1.25)$$

Podemos reescrever a equação acima convenientemente na forma:

$$\rho^m P_m\left(\frac{x'}{\rho}\right) = \frac{(2m-1)}{m}x'\rho^{m-1}P_{m-1}\left(\frac{x'}{\rho}\right) - \frac{(m-1)}{m}\rho^2 P_{m-2}\left(\frac{x'}{\rho}\right), \quad \text{para } m \geq 2. \quad (1.26)$$

Lembrando que:

$$T_{m-2}(x', y', z') = \rho^{m-2} P_{m-2} \left( \frac{x'}{\rho} \right)$$

$$T_{m-1}(x', y', z') = \rho^{m-1} P_{m-1} \left( \frac{x'}{\rho} \right)$$

$$T_m(x', y', z') = \rho^m P_m \left( \frac{x'}{\rho} \right),$$

ao substituirmos as equações acima na equação (1.25), obtemos:

$$\begin{aligned} T_m(x', y', z') &= \frac{(2m-1)}{m} x' T_{m-1}(x', y', z') \\ &\quad - \frac{(m-1)}{m} \rho^2 T_{m-2}(x', y', z'), \quad \text{para } m \geq 2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Como  $\rho^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$  temos então que:

$$\begin{aligned} T_m(x', y', z') &= \frac{(2m-1)}{m} x' T_{m-1}(x', y', z') \\ &\quad - \frac{(m-1)}{m} (x'^2 + y'^2 + z'^2) T_{m-2}(x', y', z'), \quad \text{para } m \geq 2, \end{aligned} \quad (1.28)$$

de onde

$$T_0(x', y', z') = 1 \quad \text{e} \quad T_1(x', y', z') = x'.$$

**Agradecimentos:** Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Tadashi Yokoyama, docente do DEMAC - Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação do IGCE - UNESP Rio Claro, pela dedicação e incentivo durante todo o tempo em que estivemos trabalhando juntos. Agradeço também ao Programa de Educação Tutorial - PET do Curso de Matemática pela bolsa PET/MEC-SESU concedida. Agradeço ainda aos demais professores pelos ensinamentos e a aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta na confecção deste trabalho.

**Abstract:** The aim of this work is to show some basic techniques related to the study of the dynamics in the vicinity of  $L_1$ . In particular, we present the

obtention of the Hamiltonian which governs the motion around  $L_1$ . As usual, this is done through classical Legendre Polynomials. We show the existence of a convenient recurrent formula that allows us to write the expansions in a very comfortable form up to any order.

**Keywords:** Lagrangian Points, Unstable Equilibrium Point  $L_1$ , Restricted Three-Body Problem, Hamiltonian in the Vicinity of  $L_1$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] Mc Cuskey, S. W., *Introduction to Celestial Mechanics*, Addison - Wesley Publishing Co, Massachusetts, 1963.
- [2] Brouwer, D. and Clemence, G., *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, 1961.
- [3] Moulton, F. R., *An Introduction to Celestial Mechanics*, The Macmillan Company, New York.
- [4] De Luca, N., *Mecânica Celeste*, Editora da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1982.
- [5] Corrêa, A. A., *Transferências Orbitais e Dinâmica ao Redor dos Pontos Lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$* , Dissertação de Mestrado (2001) e Tese de Doutorado (2005), INPE - São José dos Campos.
- [6] Richardson, D., *Halo Orbit Formulation for the ISEE-3 Mission*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 3, number 6, 543-548, 1980.
- [7] Jorba, A. and Masdemont, J., *Dynamics in the centre manifold of the collinear points of the Restricted Three Body Problem*, Physica D 132, 189-213, 1999.
- [8] McInnes, A. I., *Strategies for Solar Sail Mission Design in the Circular Restricted Three-Body Problem*, MS Thesis, Purdue University, Aug. 2000.

- [9] Richardson, D., *A note on a lagrangian formulation for motion about the collinear points*, Celestial Mechanics, Vol. 22, 231-236, 1980.
- [10] Francisco, A. L. M., *Cálculo Efetivo da Forma Normal Parcial para o Problema de Hill*, Dissertação de Mestrado (2001), UFRJ - Instituto de Matemática, Rio de Janeiro.
- [11] Prado, A. B. F. A., *Trajatórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade*, INPE - São José dos Campos, 2001.
- [12] Cerri, J. P. e Silva, A. J., - Monografia de Iniciação Científica (2005) - *Problema dos Três Corpos*, Grupo PET Matemática - UNESP Rio Claro (PET - Programa de Educação Tutorial, MEC/SESu).



## BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA – BICMAT

### *Orientação aos autores*

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem  $\text{\LaTeX}$ , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em [www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat](http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat), assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.

