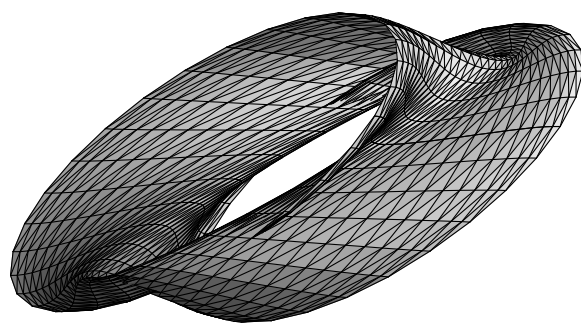


ISSN 1980-024X

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
EM MATEMÁTICA – BICMAT



VOLUME VI
OUTUBRO DE 2009
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IGCE – RIO CLARO

unesp 

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM
MATEMÁTICA – BICMAT

Comissão editorial

Alice Kimie Miwa Libardi
Nativi Viana Pereira Bertolo
Sergio Roberto Nobre

Editoração gráfica

Thiago de Melo

Realização

Conselho de Curso de Graduação em Matemática
Departamento de Matemática
IGCE – Unesp – Rio Claro
PET-Matemática / Programa de Educação Tutorial

EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de iniciação científica que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE – Unesp – Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat, com ISSN 1980-024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de iniciação científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este número teve apoio do Grupo de Pesquisa: Topologia Algébrica, Diferencial e Geométrica e do Grupo PET/Matemática/Unesp/Rio Claro e estará disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço www.rc.unesp.br/igce/matematica

SUMÁRIO

<i>Construção de um Polígono Regular de 17 Lados</i>	
Cristina Helena Bovo Batista Dias	7
<i>Variedades Grassmannianas</i>	
Karen Regina Panzarin	19
<i>Aplicações do Teorema de Seifert–Van Kampen</i>	
Sérgio Tsuyoshi Ura	29
<i>Equação do Calor – Modelagem Matemática e Método de Fourier</i>	
Jean Cerqueira Berni	49

Construção de um Polígono Regular de 17 Lados

Cristina Helena Bovo Batista Dias¹

Resumo: O artigo apresenta a construção geométrica do lado do heptadecágono. Além disso, esclarece porque um polígono pode ser construído com régua e compasso e outro não. Com o fim de facilitar o entendimento do assunto explica também o que são raízes primitivas e como encontrá-las.

Palavras-chave: Heptadecágono, régua e compasso, construções geométricas, raízes primitivas.

1 Um pouco de História

Na Grécia antiga, o desafio preferido dos geômetras era desenhar polígonos regulares usando apenas régua e compasso. Os gregos sabiam desenhar o triângulo (3 lados), o quadrado (4 lados) e o pentágono (5 lados). E, dividindo um ângulo em duas partes iguais, conseguiam obter todos os polígonos com o dobro de lados de qualquer um destes três.

Um grande desafio da época era descobrir se era possível desenhar um polígono de 17 lados, o *heptadecágono*, apenas com régua e compasso. Somente vários séculos depois, em março de 1796, Johann Carl Friedrich Gauss, com apenas 19 anos de idade, conseguiu essa façanha. E não ficou só nisso. A seguir, mostrou como desenhar qualquer polígono regular de n lados com régua e compasso, desde que n seja um número primo da forma $2^{2^k} + 1$, ou seja, um primo de Fermat. Como consequência demonstrou que o polígono de sete lados não poderia ser construído com régua e compasso.

¹Bolsista FAPESP 2005/60417-6. Artigo produzido por sugestão do Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre, após uma apresentação durante uma aula de Geometria Elementar.

2 A Construção com Régua e Compasso: Números Construtíveis

Para que possamos resolver um problema com régua e compasso, a solução, por mais complicada que possa ser, deve se compor das duas operações seguintes:

1. Traçar uma linha reta por dois pontos dados.
2. Traçar uma circunferência na qual o centro e o raio são dados.

Cada ponto é determinado como intersecção de duas retas, ou de uma reta e de uma circunferência ou ainda, de duas circunferências. Suponhamos, então que, por meio da Geometria Analítica tenhamos calculado as coordenadas dos pontos relativos a um determinado problema e que, à medida que fizemos tais cálculos não tivemos que fazer mais do que resolver equações de primeiro e segundo graus. Ou seja, pudemos exprimir cada uma das quantidades determinadas pela construção por meio das quantidades que nos foram dadas, de tal modo que as grandezas encontradas não incluíam quaisquer expressões irracionais a não ser raízes quadradas. Neste caso tais grandezas sempre poderão ser construídas através de régua e compasso e dizemos que os números que representam estas grandezas são construtíveis.

Portanto, a condição necessária e suficiente para que um problema possa ser resolvido com régua e compasso é que as quantidades procuradas possam ser expressas racionalmente por meio das quantidades dadas e por raízes quadradas.

3 Raízes Primitivas

Para entendermos como Gauss executou sua construção geométrica é necessário conhecermos um pouco sobre raízes primitivas. Façamos, então uma pequena introdução.

Teorema 1 (Pequeno Teorema de Fermat). *Se p é um número primo e se a é um número natural, então $a^p \equiv a \pmod{p}$. Em particular, se p não divide a , então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Prova: O resultado é verdadeiro para $a = 1$. Suponhamos que seja verdadeiro para $a \geq 1$; então, temos $(a + 1)^p \equiv a^p + 1 \equiv a + 1 \pmod{p}$, uma vez que os coeficientes binomiais

$$\binom{p}{k}, \quad (1 \leq k \leq p - 1)$$

são múltiplos de p .

O teorema é então verdadeiro para todo número natural a . ■

Definição 2. Seja a um inteiro que não é múltiplo de p . Chamamos um número $h \geq 1$ de *ordem de a módulo p* , quando h é o menor expoente tal que $a^h \equiv 1 \pmod{p}$.

Perceba que o pequeno teorema de Fermat garante a existência de tal h . Observa-se ainda que

$$a \pmod{p}, a^2 \pmod{p}, \dots, a^{h-1} \pmod{p}, 1 \pmod{p}$$

são todos distintos e que $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ se, e somente se, h divide k .

Definição 3. Seja p um número primo. Chamamos de *raiz primitiva módulo p* a todo número q , $1 \leq q \leq p - 1$, tal que a ordem de q módulo p é igual a $p - 1$.

Exemplo 4. Calcular a menor raiz primitiva de 17.

O problema consiste em encontrarmos o menor número q tal que a ordem de q módulo 17 seja 16, ou seja, queremos encontrar um número tal que $q^{16} \equiv 1 \pmod{17}$, e que para todo $h < 16$ temos que q^h não seja congruente a 1, módulo 17.

Tomando $q = 2$ e testando as potências de 2 encontraremos que $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$. Portanto, 2 não é uma raiz primitiva módulo 17. Testando para $q = 3$ encontramos que $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ e que 16 é o menor expoente para o qual isto acontece. Então 3 é a menor raiz primitiva módulo 17.

Observação 5. Para detalhes sobre como calcular raízes primitivas, veja os artigos 73 e 74 de *Disquisitiones Arithmeticae*.

4 A Construção do Heptadecágono

4.1 As raízes de $X^n - 1 = 0$

O problema da construção geométrica de um polígono resume-se à construção de um lado deste polígono. Gauss percebeu que as raízes da equação $X^n - 1 = 0$ estavam intimamente relacionadas com as raízes de equações mais complexas de grau n , cujas raízes, por sua vez, expressam os valores das funções trigonométricas de todos os ângulos da forma $\frac{k\pi}{n}$ para k entre 0 e $n - 1$. (Tais equações podem ser encontradas no artigo 337 da *Disquisitiones Arithmeticae*). Como a construção de um polígono de 17 lados envolvia a construção do cosseno do ângulo $2\pi/17$ radianos (valor do ângulo central deste polígono), Gauss percebeu que encontrar as raízes da equação $X^{17} - 1 = 0$ solucionaria o problema uma vez que um polígono regular de n lados está sempre inscrito num círculo, com os vértices distribuídos equidistantemente sobre este. Assim, os ângulos centrais correspondentes a cada dois vértices consecutivos medem $2\pi/n$ radianos. Cada um destes vértices coincide com uma das raízes da equação $X^n = 1$. Usando a noção de n -ésima raiz da unidade no plano complexo, temos que os vértices de um polígono regular de n lados inscrito num círculo de raio unitário e centro na origem, correspondem a partir de 1, aos pontos na forma polar:

$$r^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$ sendo que cada um destes pontos correspondem a uma das raízes da equação $X^n - 1 = 0$.

Assim, vemos que a construção de um ângulo central de $2\pi/17$ radianos (ou equivalentemente, a construção do seu cosseno) corresponde a encontrar as raízes complexas da equação $X^{17} = 1$ (as raízes da unidade). Sabemos que para $k = 0$, temos $r^0 = 1$, a única raiz real dessa equação. As outras 16 raízes são complexas, sendo as raízes da equação

$$x^{16} + x^{15} + \dots + x^2 + x + 1 = 0 \tag{1.1}$$

que é obtida quando dividimos $X^{17} - 1$ por $X - 1$. Teremos, então 16 raízes

complexas. Mas, como $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, para resolver o problema precisaremos utilizar apenas as raízes de equações do segundo grau. Ou seja, todas as quantidades envolvidas na construção do heptadecágono podem ser construídas com régua e compasso.

A equação (1.1) pode então ser decomposta em suas raízes da seguinte forma:

$$x^{16} + x^{15} + \dots + x^2 + x + 1 = (x - r^1)(x - r^2) \dots (x - r^{15})(x - r^{16}).$$

Notemos ainda que, $r = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, e que então qualquer raiz r^k pode ser obtida de r pela fórmula $r^k = rk$, $k = 1, \dots, n - 1$.

4.2 Heptágono e outros polígonos

Usando o mesmo raciocínio do item anterior perceberemos que para o heptágono precisaríamos resolver equações de segundo e terceiro graus (os divisores de $7 - 1 = 6 = 2 \times 3$) a fim de encontrarmos a solução analítica do problema. Portanto, não podemos inscrever o heptágono na circunferência usando apenas régua e compasso, pois encontraríamos pela frente pelo menos duas raízes cúbicas.

Inscrivendo os polígonos com um número primo de lados poderemos inscrever todos os outros, já que todos os números podem ser decompostos em fatores primos. Como encontraremos apenas potências de 2 somente em um número primo da forma $2^{2^n} + 1$ (número de Fermat), apenas os polígonos com número de lados iguais a um primo de Fermat, a suas potências ou a produtos destas potências, podem ser construídos com régua e compasso.

4.3 Períodos das Raízes de $X^n - 1 = 0$

Para $n = 17$, temos 16 vértices distintos r^k , além do vértice correspondente ao número real 1. Ordenamos de acordo com a ordem em que seus expoentes aparecem como raízes primitivas da congruência módulo 17 (conforme vimos no item 4.1, 3 é a menor delas), obtidas quando $k = 1, 2, \dots, 16$. Calculando as 16 primeiras raízes primitivas módulo 17 obteremos a seguinte ordem para as

raízes da equação (1.1)

$$r^3, r^9, r^{10}, r^{13}, r^5, r^{15}, r^{11}, r^{16}, r^{14}, r^8, r^7, r^4, r^{12}, r^2, r^6, r^1$$

onde os expoentes de cada uma das raízes referem-se às raízes primitivas módulo 17.

O método de Gauss consiste em dividir estas raízes em períodos contendo 8, 4, 2 e 1 raízes respectivamente, correspondendo aos divisores de 16. Os períodos são assim calculados:

- a. Toma-se no ciclo das raízes, as raízes cujos expoentes são as raízes primitivas módulo 17 de ordem par (a segunda, a quarta, a sexta, ...) e depois as cujos expoentes são as raízes primitivas módulo 17 de ordem ímpar (a primeira, a terceira, ...) e as somamos, obtendo suas variáveis. Assim temos:

$$\begin{aligned}x_1 &= r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2 + r^1 \\x_2 &= r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6\end{aligned}$$

- b. Repete-se o processo para as raízes que se encontram na lista de x_1 , toma-se aquelas de ordem par e depois de ordem ímpar, formando 2 períodos de 4 termos, y_1 e y_2 . Fazemos o mesmo para a lista de x_2 , formando mais 2 períodos de 4 termos, y_3 e y_4 .

$$\begin{aligned}y_1 &= r^{13} + r^{16} + r^4 + r^1 & y_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2 \\y_3 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12} & y_4 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6\end{aligned}$$

- c. Nas listas de y_1, y_2, y_3 e y_4 repetimos o processo e obtemos 8 períodos de 2 termos, $z_i, i = 1, \dots, 8$, a saber:

$$\begin{aligned}z_1 &= r^{16} + r^1, & z_2 &= r^{13} + r^4, & z_3 &= r^{15} + r^2, & z_4 &= r^9 + r^8 \\z_5 &= r^{11} + r^6, & z_6 &= r^{10} + r^7, & z_7 &= r^5 + r^{12}, & z_8 &= r^3 + r^{14}\end{aligned}$$

Este método tem por objetivo dividir as raízes em grupos nos quais a soma dos expoentes dê 17 porque para m e $17 - m$ temos

$$r^m = \cos\left(m\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(m\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{e} \quad r^{17-m} = \cos\left(m\frac{2\pi}{n}\right) - i \operatorname{sen}\left(m\frac{2\pi}{n}\right),$$

ou seja, estas raízes são conjugadas e, então

$$r^m + r^{17-m} = 2 \cos\left(m\frac{2\pi}{n}\right)$$

será um número real. Então todos os períodos z_i , $i = 1, \dots, 8$, correspondendo às somas dos restos m e $17 - m$, são números reais iguais a $2 \cos\left(m\frac{2\pi}{n}\right)$, para m variando de 1 a 8.

Observação 6. Note que pela forma como definimos nossas variáveis auxiliares temos

$$y_1 = z_1 + z_2, \quad y_2 = z_3 + z_4, \quad y_3 = z_5 + z_6, \quad y_4 = z_7 + z_8,$$

$$x_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \quad \text{e} \quad x_2 = z_5 + z_6 + z_7 + z_8.$$

4.4 As equações para a construção geométrica das raízes

Como cada $z_i = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, basta calcular o valor de z_1 para obtermos o lado de um polígono regular de 17 lados. De acordo com Gauss, como temos 4 períodos de 2 grupos cada um, as raízes podem ser encontradas resolvendo 4 equações de segundo grau. Ele dá os detalhes para encontrar tais equações nos artigos 345, 349, 351, 354 da Seção 7 de *Disquisitiones Arithmeticae*. São elas:

- x_1 e x_2 são raízes da equação $X^2 + X - 4 = 0$ com $x_1 > x_2$;
- y_1 e y_2 são raízes da equação $Y^2 + x_1Y - 1 = 0$ com $y_1 > y_2$;
- y_3 e y_4 são raízes da equação $Y^2 + x_2Y - 1 = 0$ com $y_4 > y_3$;
- z_1 e z_2 são raízes da equação $Z^2 + y_1Z - y_4 = 0$ com $z_1 > z_2$.

5 A Construção Elementar

Se construirmos geometricamente as raízes das equações apresentadas na seção anterior não precisaremos calcular as raízes complexas da equação $X^{17} - 1 = 0$. Para isto usaremos uma construção elementar das raízes de uma equação de segundo grau. O método de construção consiste em utilizar um círculo unitário de centro $(0, 1)$ no plano- XY , isto é, um círculo de equação: $X^2 + (Y - 1)^2 - 1 = 0$ para construir as raízes de uma equação de segundo grau (com duas raízes reais) da forma $X^2 - pX + q = 0$. Construindo as raízes das equações mencionadas acima encontraremos o valor z_1 e a partir daí o lado do polígono de 17 lados. O método consiste em:

Construir o círculo de equação $X^2 + (Y - 1)^2 - 1 = 0$. Traçar a reta tangente ao círculo pelo ponto $A = (0, 2)$, paralela ao eixo- OX . Sobre esta reta, à direita de A , constrói-se um segmento de comprimento $4/p$, calculado através da construção da Quarta Proporcional. Sobre o eixo- OX , à direita de O , constrói-se usando o mesmo método um segmento de comprimento q/p . As extremidades dos segmentos são unidos por uma reta. Cada um dos dois pontos de intersecção do círculo inicial com esta reta determina sobre o eixo- OX um ponto, através da reta que o liga ao ponto A . Os pontos x_1 e x_2 sobre o eixo- OX determinados desta maneira são as raízes da equação.

A demonstração analítica deste resultado é um simples exercício de Geometria Analítica e Álgebra Elementar de equação de segundo grau.

6 A Construção do lado do Heptadecágono

Começemos por construir as raízes da equação $X^2 + X - 4 = 0$ com $x_1 > x_2$.

1. Tracemos a circunferência de raio 1 e centro em $(0, 1)$.
2. Tracemos a reta tangente à circunferência pelo ponto $A = (0, 2)$, paralela ao eixo- OX (Figura 1.1).

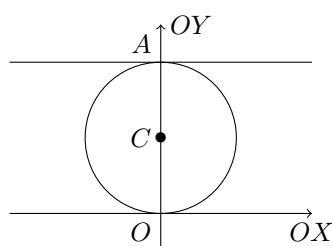
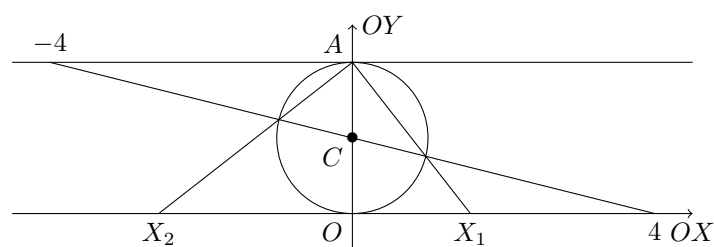


Figura 1.1: Círculo Auxiliar.

3. Sobre a tangente, construímos um segmento de comprimento 4, com orientação negativa $\left(\frac{4}{-1}\right)$.
4. Sobre o eixo- OX , constrói-se usando o mesmo método um segmento de comprimento 4, com orientação positiva $\left(\frac{-4}{-1}\right)$.
5. As extremidades dos segmentos são unidos por uma reta.

Figura 1.2: Construção de X_1 e X_2 .

6. Cada um dos dois pontos de intersecção do círculo inicial com esta reta determina sobre o eixo- OX um ponto, através da reta que o liga ao ponto A .
7. Os pontos X_1 e X_2 sobre o eixo- OX determinados desta maneira são as raízes da equação $X^2 + X - 4 = 0$, onde $X_1 > X_2$.
8. Através do método da quarta proporcional (veja *Euclid, The Thirteen Books of The Elements, Book VI, Proposition 12*) construímos $\frac{4}{X_1}$ e $\frac{-1}{X_1}$

e os marcamos, o primeiro sobre a reta tangente, o segundo sobre o eixo OX , observando o sinal para sabermos de que lado da origem está cada ponto.

9. Através do mesmo método construímos $\frac{4}{X_2}$ e $\frac{-1}{X_2}$, marcando-os da mesma forma, observando o sinal de cada um (Figura 1.3).
10. Unimos as extremidades de $\frac{4}{X_1}$ e $\frac{-1}{X_1}$, determinando dois pontos de intersecção com o círculo. Unindo estes pontos com o ponto A determinamos as raízes da equação $Y^2 + X_1Y - 1 = 0$, Y_1 e Y_2 , lembrando que $Y_1 > Y_2$.
11. Unimos as extremidades de $\frac{4}{X_2}$ e $\frac{-1}{X_2}$, determinando dois pontos de intersecção com o círculo. Unindo estes pontos com o ponto A determinamos as raízes da equação $Y^2 + X_2Y - 1 = 0$, Y_3 e Y_4 , lembrando que $Y_4 > Y_3$.
12. Utilizando novamente o método da quarta proporcional construímos $\frac{4}{Y_1}$ e $\frac{Y_4}{Y_1}$, marcando-os como nas etapas 10 e 11, observando o sinal de cada um (Figura 1.3).

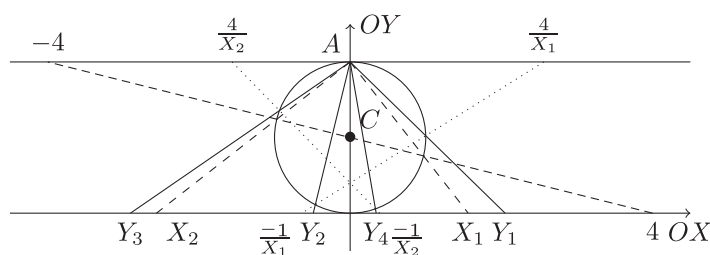


Figura 1.3: Construção dos Y_i .

13. Unimos as extremidades de $\frac{4}{Y_1}$ e $\frac{Y_4}{Y_1}$, determinando dois pontos de intersecção com o círculo. Unindo estes pontos com o ponto A determinamos a raiz Z_1 da equação $Z^2 + Y_1Z - Y_4 = 0$, lembrando que $Z_1 > Z_2$, sendo que omitimos esta última por não ser necessária à construção.
14. Traçamos então a mediatriz do segmento OZ_1 .

15. Temos, finalmente o l_{17} , lado do polígono de 17 lados, determinado pelo segmento que vai da reta r , que passa pelo centro C do círculo auxiliar, até a circunferência e , na figura 1.4, está indicado pela seta.

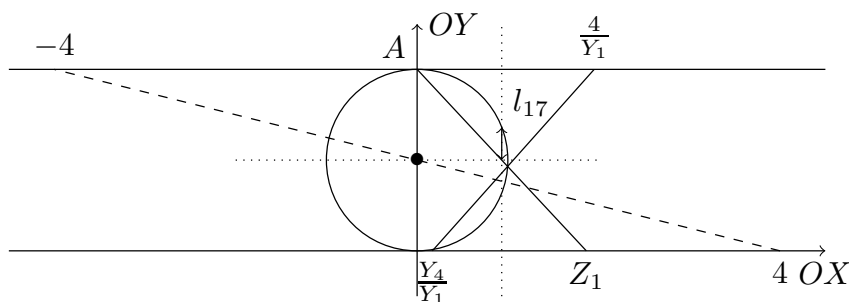


Figura 1.4: Construção de Z_1 e l_{17} .

Abstract: This work presents the geometric construction of the side of an heptadecagon. Moreover, it clarifies why a polygon can be constructed only using ruler and compass and another one not. With the purpose to facilitate the subject's understanding, it also explains about primitive roots and how we can find them.

Keywords: Heptadecagon, ruler and compass, geometrical constructions, primitive roots.

Referências Bibliográficas

- [1] Gauss, K.F.; *Disquisitiones Arithmeticae*. G. Fleischer, Leipzig, 1801. Tradução em inglês por W.C. Waterhouse. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [2] Petersen, J.; *Construções Geométricas*, Livraria Nobel, 149–152, 1967.
- [3] Euclid; *The Thirteen Books of The Elements, Book VI*.

Variedades Grassmannianas

Karen Regina Panzarin¹

Orientador(a): Alice Kimie Miwa Libardi

Resumo: Neste trabalho apresentamos um exemplo de uma variedade muito utilizada na Topologia, a variedade grassmanniana.

Palavras-chave: Variedade grassmanniana.

A noção de superfície de dimensão m num espaço euclidiano \mathbb{R}^n ($n \geq m$) é generalização direta dos objetos que encontramos na geometria diferencial clássica - as curvas do \mathbb{R}^3 que possuem vetor tangente em cada ponto e as superfícies do \mathbb{R}^3 que possuem plano tangente em cada ponto. Contudo, ainda que esta noção seja adequada para muitos propósitos, possui dois inconvenientes. O primeiro é de caráter estético: não se pode pensar na superfície em si mesma, sem fazer referência ao espaço euclidiano que a contém. O segundo inconveniente é de ordem prática: existem na natureza objetos importantes, semelhantes a superfícies, que não se apresentam contidos num espaço euclidiano. Tais são, por exemplo, os espaços projetivos e, mais geralmente, as variedades grassmannianas, a qual apresentaremos aqui.

Definição 1. Seja M um espaço topológico. Um *sistema de coordenadas locais* em M é um homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Definição 2. Um *atlas* de dimensão m sobre um espaço topológico M é uma coleção \mathcal{U} de sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , cujos domínios U cobrem M .

Definição 3. Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão m chama-se uma *variedade topológica* de dimensão m .

¹Bolsista PET/MEC/SESU.

Definição 4. Dados os sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M , tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x e coordenadas $y^i = y^i(p)$ relativamente ao sistema y . A correspondência $(x^1(p), \dots, x^m(p)) \leftrightarrow (y^1(p), \dots, y^m(p))$ estabelece um homeomorfismo $\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ que é chamado *mudança de coordenadas*.

Definição 5. Um atlas \mathcal{U} sobre um espaço topológico M diz-se *diferenciável*, de classe C^k ($k \geq 1$), se todas as mudanças de coordenadas φ_{xy} , $x, y \in \mathcal{U}$ são aplicações de classe C^k .

Definição 6. Seja \mathcal{U} um atlas de dimensão m e classe C^k num espaço topológico M . Um sistema de coordenadas $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M diz-se *admissível* relativamente ao atlas \mathcal{U} se, para todo sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, pertencente a \mathcal{U} , com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas φ_{xz} e φ_{zx} são de classe C^k .

Definição 7. Um atlas \mathcal{U} , de dimensão m e classe C^k , sobre M , diz-se *máximo* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a \mathcal{U} .

Definição 8. Uma *variedade diferenciável* de dimensão m e classe C^k é um par ordenado (M, \mathcal{U}) onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e \mathcal{U} é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M .

Em termos mais explícitos, para provar que (M, \mathcal{U}) é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k devemos verificar que:

- i. M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável.
- ii. \mathcal{U} é uma coleção de homeomorfismos $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, de conjuntos abertos $U \subset M$ sobre abertos $x(U) \subset \mathbb{R}^m$.
- iii. Os domínios U dos homeomorfismos $x \in \mathcal{U}$ cobrem M .

- iv. Dados $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ pertencentes a \mathcal{U} com $U \cap V \neq \emptyset$, então $\varphi_{xy} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ é um homeomorfismo de classe C^k .
- v. Dado um homeomorfismo $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ de um aberto $W \subset M$ sobre um aberto $z(W) \subset \mathbb{R}^m$, tal que φ_{zx} e φ_{xz} são de classe C^k para cada $x \in \mathcal{U}$, então $z \in \mathcal{U}$.

Seja X um conjunto. Se X possui estrutura de variedade diferenciável, então sua topologia fica perfeitamente determinada pelo atlas. De modo preciso:

Lema 9. *Sejam X um conjunto (sem estrutura topológica) e \mathcal{U} uma coleção de aplicações injetoras $x : U \subset X \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo às seguintes condições:*

1. *Para cada $x \in \mathcal{U}$, $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(U)$ é aberto em \mathbb{R}^n .*
2. *Os domínios U das aplicações $x \in \mathcal{U}$ cobrem X .*
3. *Se $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ pertencem a \mathcal{U} e $U \cap V \neq \emptyset$, então $x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ são abertos em \mathbb{R}^n e a aplicação $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ é de classe C^k (segue-se que $y \circ x^{-1} = (x \circ y^{-1})^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^k).*

Nestas condições, existe uma e somente uma topologia em X relativamente a qual \mathcal{U} é um atlas de classe C^k em X .

Prova: *Unicidade:* Seja τ uma topologia em X tal que \mathcal{U} é um atlas de classe C^k sobre (X, τ) . Então os domínios U dos homeomorfismos $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^n$ são elementos de τ e cobrem X . Se $A \subset X$ é aberto então $A \cap U \in \tau$, logo $x(A \cap U)$ é aberto em \mathbb{R}^n . Por outro lado, se $A \subset X$ é tal que $x(A \cap V)$ é aberto em \mathbb{R}^n para todo $x \in \mathcal{U}$, então $A = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} x^{-1}(x(A \cap V))$ é aberto em X . Conclusão: $A \in \tau \Leftrightarrow x(A \cap U)$ é aberto em \mathbb{R}^n , para cada $x \in \mathcal{U}$. Assim, $A \in \tau_1 \Rightarrow x(A \cap U)$ é aberto em \mathbb{R}^n .

Como $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo sobre sua imagem, se considerarmos em X a topologia τ_2 , $x^{-1}(x(A \cap U)) \in \tau_2$. Então, $A = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} x^{-1}(x(A \cap V)) \in \tau_2$.

De modo análogo, provamos a outra inclusão. Logo, a topologia é única.

Existência: Declaramos um subconjunto $A \subset X$ aberto se, e somente se, $x(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto para todo $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ em \mathcal{U} . Mostremos que isto realmente define uma topologia em X .

1. $\emptyset \subset X$ é aberto $\Leftrightarrow x(\emptyset \cap U) = x(\emptyset) = \emptyset$ é aberto em \mathbb{R}^n , para todo $x \in \mathcal{U}$.
 $X \subset X$ é aberto $\Leftrightarrow x(X \cap U) = x(U)$ é aberto em \mathbb{R}^n , para todo $x \in \mathcal{U}$.
2. A e B são abertos em $X \Leftrightarrow x((A \cap B) \cap U) = x((A \cap U) \cap (B \cap U)) = x(A \cap U) \cap x(B \cap U)$ é aberto em \mathbb{R}^n , para todo $x \in \mathcal{U}$.
3. Para A_λ aberto em X , $\bigcup_\lambda A_\lambda$ é aberto em $X \Leftrightarrow x(\bigcup_\lambda A_\lambda \cap U) = x(\bigcup_\lambda (A_\lambda \cap U)) = \bigcup_\lambda (x(A_\lambda \cap U))$ é aberto em \mathbb{R}^n , para todo $x \in \mathcal{U}$. ■

Lema 10. *A topologia de X , definida por um atlas \mathcal{U} satisfazendo as condições do lema 9, é de Hausdorff se, e somente se, cumpre: para qualquer par de sistemas de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $U \cap V \neq \emptyset$, não existe seqüência de pontos $z_i \in x(U \cap V)$ tal que $z_i \rightarrow z \in x(U - V)$ e $(y \circ x^{-1})(z_i) \rightarrow z' \in y(V - U)$.*

Definição 11. *A variedade de Grassmann $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão r do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+r} .*

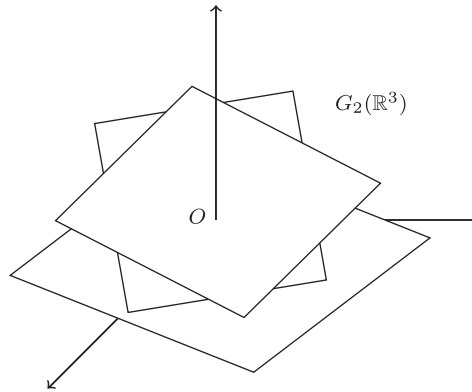


Figura 1.1: A variedade de Grassmann $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$.

Os elementos $H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ podem ser descritos por *coordenadas homogêneas*, dadas por uma matriz real $(n+r) \times r$, $Y = (y_j^i)$, de posto r , cujas colunas $v_1 = (y_1^1, \dots, y_1^{n+r}), \dots, v_r = (y_r^1, \dots, y_r^{n+r})$ formam uma base de H . Todas as outras bases de H são da forma

$$w_1 = \sum_{k=1}^r a_1^k v_k, \dots, w_r = \sum_{k=1}^r a_r^k v_k,$$

onde $A = (a_j^i)$ é uma matriz $r \times r$ invertível. Então as coordenadas homogêneas $Y \cdot A$, $A \in GL(\mathbb{R}^r)$, do elemento $H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r})$, estão definidas a menos de multiplicação à direita por uma matriz invertível $r \times r$.

Podemos introduzir *coordenadas não homogêneas* em $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$, desde que trabalhemos localmente. Estabeleçamos primeiro algumas notações.

Dados um subconjunto $\alpha = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, \dots, n+r\}$ com r elementos e uma matriz $Y \in M((n+r) \times r)$, denotamos por $\alpha(Y)$ a submatriz $r \times r$ de Y formada pelas linhas de ordem i_1, \dots, i_r . Analogamente, indicamos por α^* o complementar de α em $\{1, \dots, n+r\}$ e $\alpha^*(Y)$ a submatriz $n \times r$ de Y formada pelas linhas que não foram usadas em $\alpha(Y)$. Valem as equações:

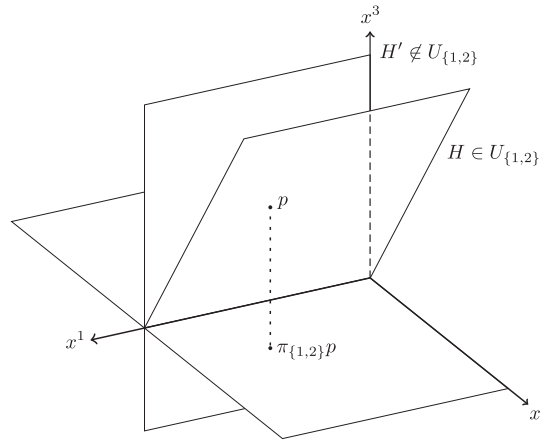
$$\alpha(Y \cdot A) = \alpha(Y) \cdot A, \quad \forall A \in GL(\mathbb{R}^r) \text{ invertível}, \quad (1.1)$$

$$\alpha^*(Y \cdot A) = \alpha^*(Y) \cdot A. \quad (1.2)$$

Para cada $\alpha = \{i_1, \dots, i_r\}$ como acima, seja $U_\alpha \subset G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ o conjunto de todos os r -planos $H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ tais que a projeção ortogonal $\pi_\alpha : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha^r$ sobre o subespaço gerado pelos vetores básicos e_{i_1}, \dots, e_{i_r} leva H isomorficamente sobre \mathbb{R}_α^r . Isto significa que para cada matriz Y de coordenadas homogêneas de H , $\alpha(Y)$ é invertível.

Vamos definir agora uma bijeção $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{nr}$ que será um sistema de coordenadas locais em $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$. Os valores de x_α serão dados como matrizes $n \times r$, como se segue: dado um subespaço $H \in U_\alpha$, seja Y uma qualquer matriz de coordenadas homogêneas de H . Escrevemos

$$x_\alpha(H) = \alpha^*(Y \cdot \alpha(Y)^{-1}) = \alpha^*(Y) \cdot \alpha(Y)^{-1}.$$



Notemos que $Y_0 = Y \cdot \alpha(Y)^{-1}$ é a única matriz de coordenadas homogêneas de H tal que $\alpha(Y_0) = I_r$. De fato, suponhamos que exista uma outra matriz B de coordenadas homogêneas de H tal que $\alpha(B) = I_r$. Então $B = Y \cdot A$, onde $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ é invertível. Assim,

$$I_r = \alpha(B) = \alpha(Y) \cdot A \implies A = \alpha(Y)^{-1}.$$

Sejam Y_1 e Y_2 matrizes de coordenadas homogêneas de H . $x_\alpha(H) = \alpha^*(Y_1) \cdot \alpha(Y_1)^{-1}$, mas $Y_1 = Y_2 \cdot A$, logo

$$\begin{aligned} x_\alpha(H) &= \alpha^*(Y_2 \cdot A) \cdot \alpha(Y_2 \cdot A)^{-1} = \alpha^*(Y_2) \cdot A \cdot (\alpha(Y_2) \cdot A)^{-1} = \\ &= \alpha^*(Y_2) \cdot A \cdot A^{-1} \cdot \alpha(Y_2)^{-1} = \alpha^*(Y_2) \cdot \alpha(Y_2)^{-1}, \end{aligned}$$

ou seja, x_α está bem definida.

Além disso, x_α é injetora: se $H, K \in U_\alpha$ são representados por matrizes Y_0, Z_0 com $\alpha(Y_0) = \alpha(Z_0) = I_r$ e $x_\alpha(H) = x_\alpha(K)$, então

$$\begin{aligned} \alpha^*(Y_0) \cdot \alpha(Y_0)^{-1} &= \alpha^*(Z_0) \cdot \alpha(Z_0)^{-1} \implies \\ \alpha^*(Y_0) \cdot I_r &= \alpha^*(Z_0) \cdot I_r \implies \alpha^*(Y_0) = \alpha^*(Z_0). \end{aligned}$$

Logo $Y_0 = Z_0$, donde $H = K$.

Notemos finalmente que $x_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^{nr}$: dada uma matriz $W \in \mathbb{R}^{nr}$, seja \widetilde{W} a única matriz $(n+r) \times r$ tal que $\alpha^*(\widetilde{W}) = W$ e $\alpha(\widetilde{W}) = I_r$. É claro que \widetilde{W} tem posto r . Seja H o subespaço do \mathbb{R}^{n+r} gerado pelas colunas de \widetilde{W} . Então $H \in U_\alpha$ e $x_\alpha(H) = W$.

Mostremos que $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ é uma variedade de classe C^∞ e dimensão nr , compacta.

1. Cada $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{nr}$, como provado acima, é uma bijeção, i.e., $x_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^{nr}$ é aberto em \mathbb{R}^{nr} .
2. Os domínios U_α cobrem $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$.
3. Sejam α, β dois subconjuntos de $\{1, \dots, n+r\}$, com r elementos, tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Consideraremos as aplicações contínuas

$$\tilde{\alpha} : M(n \times r) \rightarrow M((n+r) \times r), \quad \tilde{\alpha}(W) = \widetilde{W} \quad (\alpha^*(\widetilde{W}) = W, \alpha(\widetilde{W}) = I_r),$$

e

$$\beta : M((n+r) \times r) \rightarrow M(r \times r), \quad Y \mapsto \beta(Y).$$

Então $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = (\beta \circ \tilde{\alpha})^{-1}[GL(\mathbb{R}^r)]$. Conseqüentemente, $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é aberto em \mathbb{R}^{nr} . Além disso, dada $W \in M(n \times r)$, o subespaço $H = x_\alpha^{-1}(W)$ tem por base as colunas da matriz $\widetilde{W} = \tilde{\alpha}(W)$. Logo

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(W) = \beta^*(\tilde{\alpha}(W)) \cdot (\beta(\tilde{\alpha}(W)))^{-1}.$$

Isto evidencia claramente que a mudança de coordenadas

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é de classe C^∞ .

Para uma melhor compreensão deste item, o faremos para o *Espaço Projetivo*, que é um caso particular das Variedades Grassmannianas.

Neste caso, consideremos, para cada $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$, o conjunto U_α de todas as retas, passando pela origem do \mathbb{R}^{n+1} , cujas coordenadas homogêneas

y^1, \dots, y^{n+1} satisfazem à condição $y^\alpha \neq 0$. Seja $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $x_\alpha(H) = (y^\alpha)^{-1}(y^1, \dots, y^{\alpha-1}, y^{\alpha+1}, \dots, y^{n+1})$. Geometricamente, $x_\alpha(H) \in \mathbb{R}^n$ é obtida pela intersecção da reta H com o hiperplano $y^\alpha = 1$, omitindo-se depois a α -ésima coordenada.

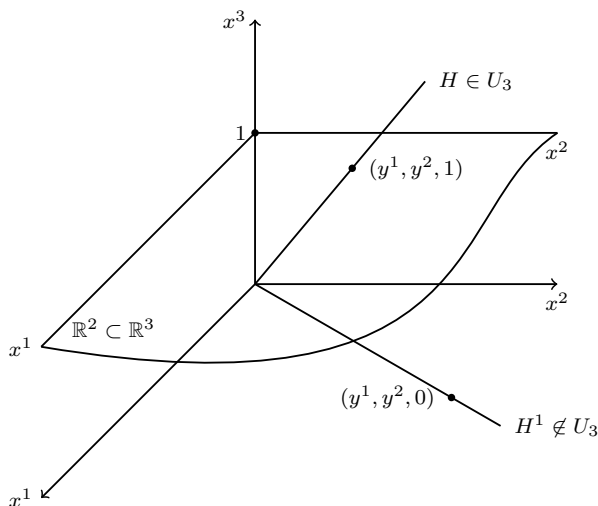


Figura 1.2: Espaço projetivo.

Seja $\alpha < \beta$. Então

$$U_\alpha \cap U_\beta = \{H \in P^n; \forall v = (y^1, \dots, y^{n+1}) \in H - \{0\}, y^\alpha \neq 0 \neq y^\beta\}.$$

Logo $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \{y \in \mathbb{R}^n; y^{\beta-1} \neq 0\}$ e $x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) = \{y \in \mathbb{R}^n; y^\alpha \neq 0\}$ são abertos do \mathbb{R}^n . Além do mais, $x_\beta \circ (x_\alpha)^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um difeomorfismo de classe C^∞ definido por

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^{\beta-1})^{-1} \cdot (x^1, \dots, x^{\alpha-1}, 1, x^\alpha, \dots, x^{\beta-2}, x^\beta, \dots, x^n).$$

4. Pelo lema 9, as $\binom{n+r}{r}$ bijeções $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{nr}$ definem uma topologia em $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$, em relação à qual formam um atlas \mathcal{U} de classe C^∞ . Como \mathcal{U} é finito, esta topologia possui base enumerável.
5. $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ é um espaço de Hausdorff.

Usaremos o lema 10. Sejam $\alpha \neq \beta$ e $W_i \in x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ uma sequência tendendo para $W \in x_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$. Então $\beta(\tilde{\alpha}(W))$ não é invertível. De fato, como $W \in x_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$, então $W = x_\alpha(H)$, com $H \in U_\alpha - U_\beta$. Seja Y a matriz de coordenadas homogêneas que representa H . Temos que $\det \alpha(Y) \neq 0$ e $\det \beta(Y) = 0$, já que $U_\alpha = \{H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r}); \det \alpha(Y) \neq 0\}$ e $U_\alpha - U_\beta = \{H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r}); \det \alpha(Y) \neq 0 \text{ e } \det \beta(Y) = 0\}$.

Seja H_1 o espaço de coordenadas homogêneas dadas por \tilde{W} . Lembrando que $\tilde{\alpha}(W) = \tilde{W}$, onde $\alpha^*(\tilde{W}) = W$ e $\alpha(\tilde{W}) = I_r$, temos

$$x_\alpha(H_1) = \alpha^*(\tilde{W}) \cdot \alpha(\tilde{W})^{-1} = W \cdot I_r^{-1} = W.$$

Como x_α é injetora (homeomorfismo), $H_1 = H$. Logo

$$\begin{aligned} \tilde{W} = Y \cdot A &\implies \beta(\tilde{W}) = \beta(Y) \cdot A \implies \beta(\tilde{\alpha}(W)) = \beta(Y) \cdot A \implies \\ \det(\beta(\tilde{\alpha}(W))) &= \det(\beta(Y) \cdot A) = \det \beta(Y) \cdot \det A = 0 \implies \\ \det(\beta(\tilde{\alpha}(W))) &= 0. \end{aligned}$$

Sendo $\beta(\tilde{\alpha}(W))$ não invertível, a sequência $[\beta(\tilde{\alpha}(W_i))]^{-1}$ não converge pois, se $[\beta(\tilde{\alpha}(W_i))]^{-1}$ convergisse para A , então $([\beta(\tilde{\alpha}(W_i))]^{-1})^{-1}$ convergiria para A^{-1} , ou seja, $\beta(\tilde{\alpha}(W_i))$ convergiria para A^{-1} , que é invertível, o que seria um absurdo já que W_i converge para W e $\beta(\tilde{\alpha}(W))$ é não invertível. Assim, $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(W_i) = \beta^*(\tilde{\alpha}(W_i)) \cdot [\beta(\tilde{\alpha}(W_i))]^{-1}$ não converge.

Por fim, provemos que a variedade de Grassmann é compacta. Com efeito, seja $V_r(\mathbb{R}^{n+r})$ o conjunto de todas as matrizes $(r+n) \times r$ de posto r . Para cada $Y \in V_r(\mathbb{R}^{n+r})$, seja $H = \pi(Y)$ o subespaço gerado pelas colunas de Y . Isto define uma aplicação natural

$$\pi : V_r(\mathbb{R}^{n+r}) \rightarrow G_r(\mathbb{R}^{n+r}).$$

Provemos inicialmente que π é contínua: para cada $\alpha = \{i_1, \dots, i_r\}$, denotamos por $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ o conjunto de todas as matrizes $Y \in V_r(\mathbb{R}^{n+r})$ tais que $\alpha(Y)$ é invertível. Como V_α é aberto em $V_r(\mathbb{R}^{n+r})$, basta provar que $\pi|_{V_\alpha}$

é contínua. Considerando o sistema de coordenadas $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{rn}$, temos $x_\alpha \circ (\pi|_{V_\alpha}) : Y \rightarrow \alpha^*(Y) \cdot \alpha(Y)^{-1}$ contínua. Logo, dado um aberto $A \in \mathbb{R}^{nr}$, sendo x_α homeomorfismo,

$$[x_\alpha \circ (\pi|_{V_\alpha})]^{-1}(A) = [x_\alpha \circ (\pi|_{V_\alpha})]^{-1}(x_\alpha(V)) = [\pi|_{V_\alpha}]^{-1}x_\alpha^{-1}x_\alpha(V) = [\pi|_{V_\alpha}]^{-1}(V)$$

é aberto. Logo $\pi|_{V_\alpha}$ é contínua.

Consideremos agora o conjunto C de todas as matrizes $(n+r) \times r$ cujas colunas v_1, \dots, v_r satisfazem à condição $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$. Vemos que C é compacto, pois é fechado e limitado em $\mathbb{R}^{(n+r)r}$. Como cada $H \in G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ possui base ortonormal, $G_r(\mathbb{R}^{n+r}) = \pi(C)$ é compacto.

Abstract: In this work we present an example of a manifold frequently studied in Topology.

Keywords: Grassmannian manifolds.

Referências Bibliográficas

- [1] Lima, E.L.; *VarietaDES Diferenciáveis*. IMPA–Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1972.

Aplicações do Teorema de Seifert–Van Kampen

Sérgio Tsuyoshi Ura¹

Orientador(a): Alice Kimie Miwa Libardi

Resumo: Neste trabalho apresentamos o Teorema de Seifert–Van Kampen como uma ferramenta útil no cálculo do grupo fundamental, que permite classificar espaços topológicos, a menos de homeomorfismos.

Palavras-chave: Teorema de Seifert–Van Kampen, grupo fundamental.

1 Introdução

Aqui apresentamos os conceitos e resultados que utilizaremos, sem demonstrações. Essas podem ser encontradas em vários textos sobre topologia algébrica, como por exemplo em [1].

2 O Grupo Fundamental

Seja $I = [0, 1]$.

Definição 1. Duas aplicações $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ são ditas *homotópicas* se existe uma aplicação contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$.

Suponha que A seja um subconjunto de X e que f, g sejam duas aplicações contínuas de X em Y . Dizemos que f, g são *homotopicamente relativos* se existir uma homotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ entre f e g tal que $F(a, t)$ independa de t para todo $a \in A$.

Definição 2. Se f, g são dois caminhos tais que $f(0) = g(1)$, então por *produto* de f e g , estamos nos referindo ao caminho $f * g$, que é definido por:

$$f * g(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

¹Bolsista FAPESP 06/61800-0.

Definição 3. Dois caminhos $f, g : I \rightarrow X$ são *equivalentes* se f e g são homotópicos relativamente a $\{0, 1\}$.

Definição 4. Um caminho é dito *fechado* se $f(0) = f(1)$. Se $f(0) = x$, dizemos que f é de ponto base x .

Definição 5. O produto $f * g$ é definido para todo par de caminhos fechados de mesmo ponto base $x \in X$. Denotamos o conjunto das classes de equivalência de caminhos fechados de base $x \in X$ por $\pi(X, x)$.

Lema 6. O conjunto $\pi(X, x)$ possui um produto definido por $[f][g] = [f * g]$ bem definido, que o torna um grupo. Este grupo é chamado de grupo fundamental de X com ponto base x .

3 Grupos Livres

Seja S um conjunto, e considere que os elementos de S sejam símbolos não comutativos. Usando estes símbolos, formamos *palavras*, que são expressões da forma:

$$W = x_1^{\epsilon(1)} x_2^{\epsilon(2)} \cdots x_k^{\epsilon(k)}$$

onde cada $x_i \in S$, pode-se ter repetições, e $\epsilon(i) = \pm 1$. É conveniente termos *palavras vazias*, em que não aparecem símbolos. Uma palavra é dita *reduzida* se não contém x^{-1} seguido de x^1 ou vice e versa.

Usando justaposição de palavras reduzidas como lei de composição e reduzindo a palavra obtida, se necessário, o conjunto G palavras reduzidas nos símbolos de S forma um grupo. Este grupo é chamado de *grupo livre gerado por S* . Os símbolos em S não importam, isto é, se S' é um conjunto que é bijetivo a S , então os grupos resultantes gerados por S e S' serão isomorfos.

É conveniente tratar os grupos livres de forma ligeiramente diferente, considerando classes de equivalência de palavras sob uma relação de equivalência conveniente.

Suponha que R seja um conjunto de palavras em S . Considere as seguintes operações em palavras em S :

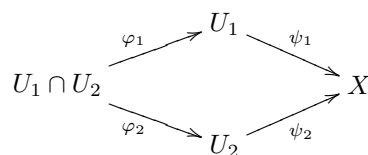
- (i) insira xx^{-1} em uma palavra, onde $x \in S$.
- (ii) delete xx^{-1} de uma palavra, onde $x \in S$.
- (iii) insira r ou r^{-1} em uma palavra, onde $r \in R$.
- (iv) delete r ou r^{-1} em uma palavra, onde $r \in R$.

Diremos que duas palavras W e W' são equivalentes se, e somente se, W' pode ser obtida de W por um número finito de operações dos tipos (i)–(iv). Esta relação é de equivalência, e o conjunto dessas classes de equivalência forma um grupo, com a justaposição como lei de composição. Este grupo é chamado de *grupo com apresentação* $(S; R)$, e é denotado por $\langle S; R \rangle$. O conjunto S é o conjunto dos *geradores* e R é chamado de o conjunto de *relatores*.

Dado um grupo G , dizemos que G possui apresentação $(S; R)$ se G é isomorfo a $\langle S; R \rangle$.

4 O Teorema de Seifert–Van Kampen

Suponhamos que seja dado um espaço X que é união de dois subespaços conexos por caminhos U_1 e U_2 . Suponhamos também que $U_1 \cap U_2$ seja não vazio e conexo por caminhos. O Teorema de Seifert–Van Kampen nos dão um modo de calcular o grupo fundamental de X , desde que conheçamos os grupos fundamentais de U_1 , U_2 e $U_1 \cap U_2$. Consideremos φ_1 , φ_2 , ψ_1 , ψ_2 as várias inclusões, como indicadas abaixo.



Escolhido um ponto base $x_0 \in U_1 \cap U_2$, temos o seguinte diagrama comutativo de homomorfismos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi(U_1, x_0) & & \\
 & \nearrow \varphi_1 & & \searrow \psi_1 & \\
 \pi(U_1 \cap U_2, x_0) & & & & \pi(X, x_0) \\
 & \searrow \varphi_2 & & \nearrow \psi_2 & \\
 & & \pi(U_2, x_0) & &
 \end{array}$$

Suponhamos que os grupos fundamentais de $U_1 \cap U_2$, U_1 e U_2 sejam conhecidos, cujas respectivas apresentações são dadas por: $\pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle S; R \rangle$, $\pi(U_1, x_0) = \langle S_1; R_1 \rangle$ e $\pi(U_2, x_0) = \langle S_2; R_2 \rangle$.

Se $s \in S$, então $\varphi_{1\#}s \in \pi(U_1, x_0)$ e $\varphi_{2\#}s \in \pi(U_2, x_0)$ e portanto, podemos expressar estes elementos como palavras em S_1 e S_2 , respectivamente. Sejam $'\varphi_{1\#}s'$ e $'\varphi_{2\#}s'$ as representações de $\varphi_{1\#}s$ e $\varphi_{2\#}s$ como palavras em S_1 e S_2 , respectivamente.

R_S é um conjunto de relações dado por $\{'\varphi_{1\#}s' = '\varphi_{2\#}s'; s \in S\}$.

Teorema 7 (Seifert–Van Kampen). $\pi(X, x_0)$ é isomorfo ao grupo definido pelo gerador $S_1 \cup S_2$ e de relator $R_1 \cup R_2 \cup R_S$.

Corolário 8. O grupo $\pi(X, x_0)$ é gerado pelo conjunto $\psi_{1\#}S_1$ e $\psi_{2\#}S_2$, onde S_1 e S_2 são os geradores de $\pi(U_1, x_0)$ e $\pi(U_2, x_0)$, respectivamente.

Corolário 9. Se $S_1 = S_2$, então $\pi(X, x_0)$ é trivial.

Um caso especial deste corolário é:

Corolário 10. Se $n \geq 2$, então S^n é simplesmente conexo.

Corolário 11. Se $U_1 \cap U_2$ é simplesmente conexo, então $\pi(X, x_0)$ é um grupo de gerador $S_1 \cup S_2$ e relator $R_1 \cup R_2$.

Corolário 12. O grupo fundamental de RP^n é \mathbb{Z}_2 e o de $L(p, q)$ é \mathbb{Z}_p .

5 Cálculos usando o Teorema de Seifert–Van Kampen

Exemplo 13. Seja $X = C_1 \cup C_2$ um subconjunto de \mathbb{R}^2 , onde

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 + y^2 = 1\},$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x + 1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Então $X = U_1 \cup U_2$, onde $U_1 = X - \{x_1\}$ e $U_2 = X - \{x_2\}$, para $x_1 = (-2, 0)$ e $x_2 = (2, 0)$.

U_1 e U_2 são subconjuntos abertos e conexos por caminhos de X , com $U_1 \cap U_2$ simplesmente conexo.

U_j e C_j são homotopicamente equivalentes relativamente a x_0 , para $j = 1, 2$. Então $\pi(U_1, x_0)$ e $\pi(U_2, x_0)$ são grupos livres com um gerador. Usando o corolário 11, temos que $\pi(X, x_0)$ é um grupo livre com dois geradores.

O grupo fundamental do toro: Seja o toro T como na figura 1.1. Sejam $U_1 = T - \{y\}$ e $U_2 = T - (a_1 - a_2)$. U_1 , U_2 e $U_1 \cap U_2$ são abertos e conexos por caminhos, e portanto, podemos aplicar o Teorema de Seifert–Van Kampen.

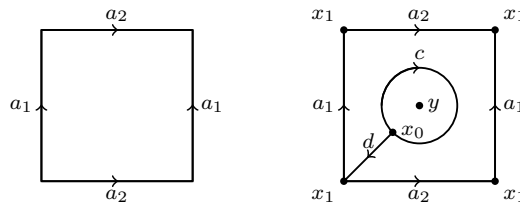


Figura 1.1: Toro T .

Sejam x_0 e x_1 os pontos indicados na figura 1.1. Seja também c uma circunferência centrada em y , passando por x_0 , e seja d o segmento de reta que liga x_1 a x_0 , como indicados na figura 1.1.

Os eixos do quadrado formam um ‘8’ em T após as identificações, e o espaço resultante é um retrato por deformação forte de U_1 .

Se α_1 e α_2 são caminhos fechados em U_1 , de ponto base x_1 , cujos traços são a_1 e a_2 , respectivamente, com direções indicadas na figura 1.1, então $\pi(U_1, x_1)$

é o grupo livre de geradores $[\alpha_1], [\alpha_2]$. Seja δ um caminho em U_1 que liga x_0 a x_1 e que corresponde a d . Então $\pi(U_1, x_0)$ é o grupo livre de geradores $[\delta * \alpha_1 * \bar{\delta}], [\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}]$, que abreviaremos como A_1 e A_2 , respectivamente.

Como U_2 é simplesmente conexo, $\pi(U_2, x_0) = 1$.

O círculo c é um retrato por deformação forte de $U_1 \cap U_2$. Se γ denotar um caminho fechado em $U_1 \cap U_2$, de ponto base x_0 , que corresponde a c , com a direção indicada na figura 1.1, então $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ é um grupo livre de gerador $[\gamma]$.

Pelo Teorema de Seifert–Van Kampen, $\pi(T, x_0)$ é gerado por $\{A_1, A_2\}$, e satisfaz a relação $'\varphi_{1\#}[\gamma]' = '\varphi_{2\#}[\gamma]'$.

Em U_1 , temos que

$$[\varphi_1\gamma] = [\delta * \lambda_1 * \alpha_2 * \bar{\alpha}_1 * \bar{\alpha}_2 * \bar{\delta}] = [\delta * \alpha_1\bar{\delta}][\delta * \alpha_2\bar{\delta}][\delta * \bar{\alpha}_1\bar{\delta}][\delta * \bar{\alpha}_2\bar{\delta}],$$

e portanto $'\varphi_{1\#}[\gamma]' = A_1 A_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2$. Por outro lado, $'\varphi_{2\#}[\gamma]' = 1$ e então $\pi(T, x_0)$ é o grupo de apresentação $(\{A_1, A_2\}; \{A_1 A_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2\})$.

Portanto, $\pi(T, x_0)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

O grupo fundamental da garrafa de Klein: Seja a garrafa de Klein K representada na figura 1.2.

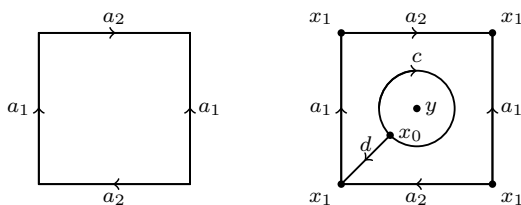


Figura 1.2: Garrafa de Klein K .

Usando a notação da figura 1.2, sejam $U_1 = K - \{y\}$ e $U_2 = K - (a_1 \cup a_2)$. U_1 , U_2 e $U_1 \cap U_2$ satisfazem as condições do Teorema de Seifert–Van Kampen. Os eixos da região quadrada, após identificações, é uma figura em forma de ‘8’, que é um retrato por deformação forte de U_1 .

Isto implica que $\pi(U_1, x_0)$ é um grupo livre gerado por $\{[\alpha_1], [\alpha_2]\}$, onde α_1, α_2 denotam os caminhos correspondentes a a_1, a_2 , respectivamente. Se δ denota o caminho correspondente a d , então $\pi(U_1, x_0)$ é o grupo livre gerado por $[\delta * \alpha_1 * \bar{\delta}]$ e $[\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}]$, que abreviaremos para A_1 e A_2 , respectivamente.

U_2 é contrátil e portanto $\pi(U_2, x_0) = 1$. Como a circunferência c é um retrato por deformação forte de $U_1 \cap U_2$, então $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ é um grupo livre gerado por $[\gamma]$, onde γ é o caminho em $U_1 \cap U_2$ correspondente a c .

Em U_1 , temos que

$$[\varphi_1 \gamma] = [\delta * \alpha_1 * \alpha_2 * \bar{\alpha}_1 * \alpha_2 \bar{\delta}] = [\delta * \alpha_1 \bar{\delta}][\delta * \alpha_1 \bar{\delta}][\delta * \bar{\alpha}_1 \bar{\delta}][\delta * \alpha_2 \bar{\delta}],$$

de modo que $'\varphi_{1\#}[\gamma]' = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2$. Por outro lado, temos em U_2 que $'\varphi_{2\#}[\gamma]' = 1$. Então, pelo Teorema de Seifert–Van Kampen, temos que $\pi(K, x_0)$ é isomorfo ao grupo $\langle \{A_1, A_2\}; \{A_1 A_2 A_1^{-1} A_2 = 1\} \rangle$.

O grupo fundamental do plano projetivo real RP^2 : Representamos RP^2 como na figura 1.3. Sejam x_0, x_1, y, c, d pontos, uma circunferência e um segmento, como indicados na figura 1.3.

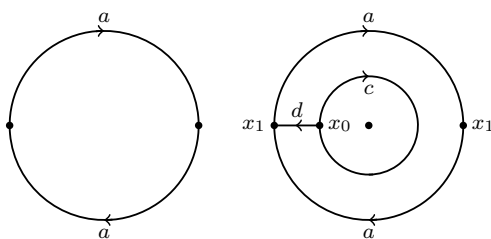


Figura 1.3: Plano projetivo real.

Sejam $U_1 = RP^2 - \{y\}$ e $U_2 = RP^2 - \{a\}$. Então U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ satisfazem as condições do teorema de Seifert–Van Kampen.

A curva a representa uma circunferência no plano projetivo e é um retrato por deformação forte de U_1 . Então $\pi(U_1, x_1)$ é um grupo livre gerado por $[\alpha]$, onde α é um caminho em U_1 correspondente a a . Se δ denota o caminho de x_0 a x_1 correspondente a d , então $\pi(U_1, x_0)$ é o grupo livre gerado por $A = [\delta * \alpha * \bar{\delta}]$.

O subespaço U_2 é contrátil e portanto $\pi(U_2, x_0) = 1$.

A circunferência c é um retrato por deformação forte de $U_1 \cap U_2$, de modo que $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ é o grupo livre gerado por $[\gamma]$, onde γ denota o caminho em $U_1 \cap U_2$, de ponto base x_0 que corresponde a c .

Pelo Teorema de Seifert–Van Kampen, segue que $\pi(RP^2, x_0)$ é o grupo de gerador A e relação $'\varphi_{1\#}[\gamma]' = '\varphi_{2\#}[\gamma]'$.

Em U_1 , temos que $[\varphi_1\gamma] = [\delta * \alpha * \alpha * \bar{\delta}] = [\delta * \alpha \bar{\delta}] [\delta * \alpha \bar{\delta}]$ e portanto $'\varphi_{1\#}[\gamma]' = A^2$. Como $'\varphi_{2\#}[\gamma]' = 1$, temos que $\pi(RP^2, x_0)$ é isomorfo a $\langle \{A\}; \{A^2\} \rangle$, isto é, a \mathbb{Z}_2 .

Um espaço de identificação: Seja X uma região poligonal de n lados, cujas arestas da região poligonal estão identificadas como indicadas na figura 1.4(a).

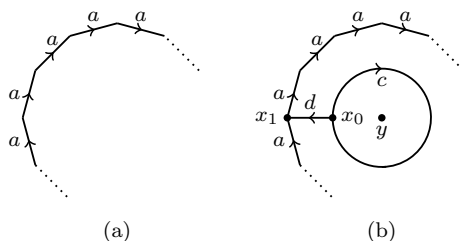


Figura 1.4: Espaço de identificação.

Usando a notação da figura 1.4, sejam $U_1 = X - \{y\}$ e $U_2 = X - \{a\}$. Os espaços U_1 , U_2 e $U_1 \cap U_2$ são abertos e conexos por caminhos.

As arestas da região poligonal formam uma circunferência em X que é um retrato por deformação forte de U_1 , e portanto, $\pi(U_1, x_1)$ é um grupo abeliano livre gerado por $[\alpha]$, onde α é um caminho fechado de ponto base x_1 que corresponde a a . Se δ é um caminho ligando x_0 a x_1 , correspondendo a d , então $\pi(U_1, x_0)$ é um grupo livre gerado por $[\delta * \alpha * \bar{\delta}] = A$.

O subespaço U_2 é contrátil, e portanto, $\pi(U_2, x_0) = 1$.

A circunferência c é um retrato por deformação forte de $U_1 \cap U_2$, de modo que $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ é um grupo abeliano livre gerado por $[\gamma]$, onde γ é um caminho

fechado em $U_1 \cap U_2$ de ponto base x_0 que corresponde a c .

Aplicando o Teorema de Seifert–Van Kampen, temos que $\pi(X, x_0)$ possui $\{A\}$ como gerador e $\{\varphi_{1\#}[\gamma]' = \varphi_{2\#}[\gamma]'\}$ como relação.

Não é difícil ver que $[\varphi_1\gamma] = [\delta * \alpha * \dots * \alpha * \bar{\delta}] = [\delta * \alpha * \bar{\delta}]^n$, e portanto, $\varphi_{1\#}[\gamma]' = A^n$. Como $\varphi_{2\#}[\gamma]' = 1$, segue que $\pi(X, x_0)$ possui apresentação $\langle \{A\}; \{A^n\} \rangle$, isto é, $\pi(X, x_0)$ é isomorfo ao grupo cíclico \mathbb{Z}_n .

6 O Grupo Fundamental de uma Superfície

Teorema 14. *O grupo fundamental da superfície S , com $S = S^2 \# mT \# nRP^2$ é o grupo com geradores*

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, f_2, \dots, f_n$$

e relação

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2 = 1.$$

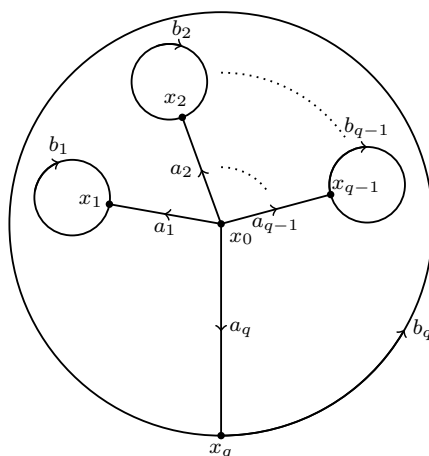
Prova: S pode ser reescrito como $S = X \cup H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m \cup M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$, onde:

- (i) X é homeomorfo a uma esfera com $m + n = q$ discos abertos disjuntos removidos, H_1, H_2, \dots, H_m são toros com um disco aberto removido e M_1, M_2, \dots, M_n são espaços reais projetivos RP^2 com um disco aberto removido.
- (ii) Se b_1, b_2, \dots, b_q denotam as q fronteiras dos discos abertos removidos de X , então $X \cap H_i = b_i$, $X \cap M_j = B_{m+j}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Observemos que X é homeomorfo ao disco D^2 com $q - 1$ discos abertos removidos.

Seja x_0 um ponto no interior de X , como indicado na figura 1.5.

Sejam também x_1, x_2, \dots, x_q pontos de b_1, b_2, \dots, b_q , respectivamente, como indicados na figura 1.5. Sejam a_1, a_2, \dots, a_q curvas ligando x_0 a x_1, x_2, \dots, x_q , respectivamente, como indicados na figura 1.5.

Figura 1.5: Superfície S .

O subespaço de X , que consiste em a_1, a_2, \dots, a_{q-1} e b_1, b_2, \dots, b_{q-1} é um retrato por deformação forte de X . Não é difícil ver que o grupo fundamental é um grupo livre de $q - 1$ geradores, já que é homotopicamente equivalente, relativamente a $\{x_0\}$ ao conjunto que consiste da reunião de $q - 1$ círculos com exatamente um ponto em comum. Se tomarmos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}$ os caminhos em X , ligando x_0 a x_i , que correspondem a a_1, a_2, \dots, a_q , respectivamente, e se tomarmos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{q-1}$ caminhos fechados com pontos bases x_1, x_2, \dots, x_q , correspondentes a b_1, b_2, \dots, b_{q-1} respectivamente, então $\pi(X, x_0)$ é o grupo livre gerado por

$$B_1 = [\alpha_1 * \beta_1 * \bar{\alpha}_1], B_2 = [\alpha_2 * \beta_2 * \bar{\alpha}_2], \dots, B_q = [\alpha_q * \beta_q * \bar{\alpha}_q].$$

Se $B_q = [\alpha_q * \beta_q * \bar{\alpha}_q]$, então $B_q^{-1} = B_1 B_2 \cdots B_{q-1}$, ou seja, $B_1 B_2 \cdots B_q = 1$. Então, é equivalente $\pi(X, x_0)$ ser o grupo com relatores B_1, B_2, \dots, B_q e relação $B_1 B_2 \cdots B_q = 1$.

Se tomarmos um ponto base diferente, digamos, x_i ($i = 1, 2, \dots, q$), então $\pi(X, x_i)$ é o grupo cujos geradores são $\{h_i(B_1), h_i(B_2), \dots, h_i(B_q)\}$ e relação $\{h_i(B_1 B_2 \cdots B_q) = 1\}$, onde $h_i : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X, x_i)$ é o isomorfismo dado por $h_i([\theta]) = [\bar{\alpha}_i * \theta * \alpha_i]$.

Vejamos agora H_i . Por cálculos anteriores, temos que o grupo fundamental de H_i é um grupo livre de dois geradores. Com a notação da figura 1.6, $\pi(H_i, x_0)$ é o grupo livre gerado por $C_i = [\epsilon_i * \gamma_i * \bar{\epsilon}_i]$ e $D_i = [\epsilon_i * \delta_i * \bar{\epsilon}_i]$, onde ϵ_i corresponde à curva e_i em H_i e γ_i, δ_i correspondem às curvas fechadas em H_i , c_i, d_i , respectivamente, como indicados na figura 1.6.

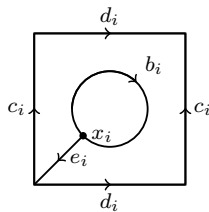


Figura 1.6: H_i .

O caminho β_i correspondente a b_i pode ser expresso em termos de C_i e D_i , da seguinte forma: $[\beta_i][C_i D_i C_i^{-1} D_i^{-1}]$.

Consideremos agora a faixa de Möbius M_j . O grupo fundamental de M_j é um grupo livre de gerador $F_j = [\epsilon_{j+m} * \phi_j * \bar{\epsilon}_{j+m}]$, onde ϵ_{j+m} é o caminho correspondente a e_{j+m} na figura 1.7 e ϕ_j é o caminho fechado correspondente a f_j na figura 1.7. Observe que $[\beta_{j+m}] = F^2$, onde β_{j+m} é o caminho correspondente a b na figura 1.7.

Usando os resultados acima chegaremos, por recorrência, ao grupo fundamental de S . Primeiramente, definiremos subespaços $X_0, X_1, X_2, \dots, X_q$ de S da seguinte forma: $X_0 = X$, $X_i = X_{i-1} \cup H_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ e $X_{m+j} = X_{m+j-1} \cup M_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Mostraremos então que os espaços X_i, X_{m+j} são como seguem:

$\pi(X_i, x_0)$, $i = 1, 2, \dots, m$, é o grupo com geradores

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_i, d_i, B_{i+1}, B_{i+2}, \dots, B_q$$

e relação

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_i d_i c_i^{-1} d_i^{-1} B_{i+1} B_{i+2} \dots B_q = 1.$$

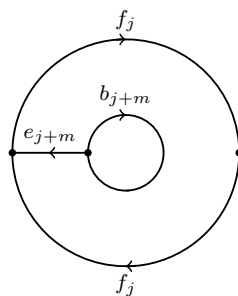


Figura 1.7:

$\pi(X_{m+j}, x_0)$, $j = 1, 2, \dots, n$, é o grupo com geradores

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, f_2, \dots, f_j, B_{m+j+1}, B_{m+j+2}, \dots, B_q$$

e relação

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 f_2^2 \dots f_j^2 B_{m+j+1} B_{m+j+2} \dots B_q = 1.$$

Para demonstrarmos estes resultados, usaremos o Teorema de Seifert–Van Kampen, e isto exigirá que X_k se escreva como uma união de dois conjuntos abertos. Temos que $X_k = X_{k-1} \cup Y_k$, onde $Y_k = H_i$ ou M_j , para algum i ou j , mas nenhum desses espaços são abertos. Porém como se tratam de somas conexas de superfícies, existe uma vizinhança N_k de b_k em S que é homeomorfa a $S^1 \times (-1, 1)$, tal que se $g_k : N_k \rightarrow S^1 \times (-1, 1)$ é o homeomorfismo, então $g_k(b_k) = S^1 \times \{0\}$ e $g_k^{-1}(S^1 \times (-1, 0]) \subset X \subset X_{k-1}$ e $g_k^{-1}(S^1 \times [0, 1)) \subset Y_k$.

Definimos então

$$U_k = X_{k-1} \cup N_k \subset X_{k-1} \cup Y_k = X_k,$$

$$V_k = N_k \cup Y_k \subset X_{k-1} \cup Y_k \subset X_k.$$

U_k e V_k são subconjuntos abertos e conexos por caminhos de X_k . Também, $U_k \cap V_k = N_k$ é conexo por caminhos. Assim, podemos aplicar o Teorema de Seifert–Van Kampen e $X_k = U_k \cup V_k$, com $x_k \in b_k$ como ponto base. X_{k-1}, Y_k, b_k são retratos por deformação forte de $U_k, V_k, U_k \cap V_k$, respectivamente. Então

$$\pi(U_k, x_k) = \pi(X_{k-1}, x_k), \pi(V_k, x_k) = \pi(Y_k, x_k), \pi(U_k \cap V_k, x_k) = \pi(b_k, x_k) = \langle \{[\beta_k]\}; \emptyset \rangle.$$

$\pi(X_k, x_0)$ pode ser calculado por recorrência. Começemos pelo cálculo de $\pi(X_1, x_0)$.

$$\begin{aligned} \pi(U_1, x_1) &= \pi(X, x_1) = \langle \{h_1(B_1), h_1(B_2), \dots, h_1(B_q)\}; \{h_1(B_1 B_2 \cdots B_q) = 1\} \rangle, \\ \pi(V_1, x_1) &= \pi(H_1, x_1) = \langle \{C_1, D_1\}; \emptyset \rangle, \quad \pi(U_1 \cap V_1, x_1) = \pi(b_1, x_1) = \langle \{\beta_1\}; \emptyset \rangle. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Seifert–Van Kampen, $\pi(X_1, x_1) = \pi(U_1 \cup V_1, x_1)$ é o grupo com geradores $C_1, D_1, h_1(B_1), h_1(B_2), \dots, h_1(B_q)$ e relações $h_1(B_1 B_2 \cdots B_q) = 1$. $h_1(B_1) = C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1}$, pois $h_1(B_1) = [\beta_1]$ em X e $[\beta_1] = C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1}$ em H_1 .

Eliminando o gerador $h_1(B_1)$, temos que $\pi(X_1, x_1)$ é o grupo com geradores $C_1, D_1, h_1(B_2), h_1(B_3), \dots, h_1(B_q)$ e relação $C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} h_1(B_2 B_3 \cdots B_q) = 1$. Isto implica que $\pi(X_1, x_0)$ é o grupo com geradores

$$c_1, d_1, B_2, B_3, \dots, B_q$$

e relação

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} B_2 B_3 \cdots B_q = 1,$$

onde

$$\begin{aligned} c_1 &= h^{-1}(C_1) = [\alpha_1 * \epsilon_1 * \gamma_1 * \bar{\epsilon}_1 * \bar{\alpha}_1], \\ d_1 &= h^{-1}(D_1) = [\alpha_1 * \epsilon_1 * \delta_1 * \bar{\epsilon}_1 * \bar{\alpha}_1]. \end{aligned}$$

Suponhamos que o resultado esteja provado para todo $p \leq l_1 < m$. Calculemos agora $\pi(X_{l_1+1}, x_0)$.

$$\begin{aligned} \pi(U_{l_1+1}, x_{l_1+1}) &= \pi(X_{l_1}, x_{l_1+1}) = \\ &= \langle \{C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_{l_1}, D_{l_1}, h_{l_1+1}(B_{l_1+1}), \dots, h_{l_1+1}(B_q)\}; \\ &\quad \{C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \cdots C_{l_1} D_{l_1} C_{l_1}^{-1} D_{l_1}^{-1} h_{l_1+1}(B_{l_1+1} \cdots B_q) = 1\} \rangle, \end{aligned}$$

onde $C_i = h_{l_1+1}(c_i)$ e $D_i = h_{l_1+1}(d_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$.

$$\begin{aligned}\pi(V_{l_1+1}, x_{l_1+1}) &= \pi(H_{l_1+1, l_1+1}) = \langle \{C_{l_1+1}, D_{l_1+1}\}; \emptyset \rangle, \\ \pi(U_{l_1+1} \cap V_{l_1+1}, x_{l_1+1}) &= \pi(b_{l_1+1}, x_{l_1+1}) = \langle \{\beta_{l_1+1}\}; \emptyset \rangle.\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Seifert–Van Kampen,

$$\pi(X_{l_1+1}, x_{l_1+1}) = \pi(U_{l_1+1} \cup V_{l_1+1}, x_{l_1+1})$$

é o grupo com geradores

$$C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_{l_1+1}, D_{l_1+1}, h_{l_1+1}(B_{l_1+1}), h_{l_1+1}(B_{l_1+2}), \dots, h_{l_1+1}(B_q)$$

e relação

$$C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \dots C_{l_1+1} D_{l_1+1} C_{l_1+1}^{-1} D_{l_1+1}^{-1} h_{l_1+1}(B_{l_1+1} \dots B_q) = 1.$$

$h_{l_1+1}(B_{l_1+1}) = C_{l_1+1} D_{l_1+1} C_{l_1+1}^{-1} D_{l_1+1}^{-1}$, pois $h_{l_1+1}(B_{l_1+1}) = [\beta_{l_1+1}]$ em X_l , e $[\beta_{l_1+1}] = C_{l_1+1} D_{l_1+1} C_{l_1+1}^{-1} D_{l_1+1}^{-1}$ em H_{l_1+1} .

Eliminando o gerador $h_{l_1+1}(B_{l_1+1})$, temos que $\pi(X_{l_1+1}, x_{l_1+1})$ é o grupo com geradores

$$C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_{l_1+1}, D_{l_1+1}, h_{l_1+1}(B_{l_1+2}), \dots, h_{l_1+1}(B_q)$$

e relação

$$C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \dots C_{l_1+1} D_{l_1+1} C_{l_1+1}^{-1} D_{l_1+1}^{-1} h_{l_1+1}(B_{l_1+2} \dots B_q) = 1.$$

Isto implica que $\pi(X_{l_1+1}, x_0)$ é o grupo com geradores

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_{l_1+1}, d_{l_1+1}, B_{l_1+2}, \dots, B_q$$

e relação

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \dots c_{l_1+1} d_{l_1+1} c_{l_1+1}^{-1} d_{l_1+1}^{-1} B_{l_1+2} \dots B_q = 1,$$

onde $C_i = h_{l_1+1}(c_i)$, $D_i = h_{l_1+1}(d_i)$, $i = 1, 2, \dots, l_1$,

$$\begin{aligned}c_{l_1+1} &= h^{-1}(C_{l_1+1}) = [\alpha_{l_1+1} * \epsilon_{l_1+1} * \gamma_{l_1+1} * \bar{\epsilon}_{l_1+1} * \bar{\alpha}_{l_1+1}], \\ d_{l_1+1} &= h_{l_1+1}^{-1}(D_{l_1+1}) = [\alpha_{l_1+1} * \epsilon_{l_1+1} * \delta_{l_1+1} * \bar{\epsilon}_{l_1+1} * \bar{\alpha}_{l_1+1}].\end{aligned}$$

Portanto, $\pi(X_i, x_0)$, $i = 1, 2, \dots, m$, é o grupo com geradores

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_i, d_i, B_{i+1}, B_{i+2}, \dots, B_q$$

e relação

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_i d_i c_i^{-1} d_i^{-1} B_{i+1} B_{i+2} \dots B_q = 1.$$

Calculemos $\pi(X_{m+1}, x_0)$.

$$\begin{aligned} \pi(U_{m+1}, x_{m+1}) &= \pi(X_m, x_{m+1}) = \\ &= \langle \{C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_m, D_m, h_{m+1}(B_{m+1}), \dots, h_{m+1}(B_q)\}; \\ &\quad \{C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \dots C_m D_m C_m^{-1} D_m^{-1} h_{m+1}(B_{m+1} \dots B_q) = 1\} \rangle, \end{aligned}$$

$$\pi(V_{m+1}, x_{m+1}) = \pi(M_{m+1}, x_{m+1}) = \langle \{F_1\}; \emptyset \rangle \text{ e } \pi(U_{m+1} \cap V_{m+1}, x_{m+1}) = \pi(b_{m+1}, x_{m+1}) = \langle \{[\beta_{m+1}]\}; \emptyset \rangle.$$

Pelo Teorema de Seifert-Van Kampen,

$$\pi(X_{m+1}, x_{m+1}) = \pi(U_{m+1} \cup V_{m+1}, x_{m+1})$$

é o grupo com geradores

$$C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_m, D_m, F_1, h_{m+1}(B_{m+1}), h_{m+1}(B_{m+2}), \dots, h_{m+1}(B_q)$$

e relações

$$C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \dots C_m D_m C_m^{-1} D_m^{-1} h_{m+1}(B_{m+1} \dots B_q) = 1,$$

onde $h_{m+1}(B_{m+1}) = F_1^2$, pois $h_{m+1}(B_{m+1}) = [\beta_{m+1}]$ em X_m e $[\beta_{m+1}] = F_1^2$ em M_1 .

Eliminando o gerador $h_{m+1}(B_{m+1})$, temos que $\pi(X_{m+1}, x_{m+1})$ é o grupo com geradores

$$C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_m, D_m, F_1, h_{m+1}(B_{m+2}), \dots, h_{m+1}(B_q)$$

e relação

$$C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \dots C_m D_m C_m^{-1} D_m^{-1} F_1^2 h_{m+1}(B_{m+2} \dots B_q) = 1.$$

Isto implica que $\pi(X_{m+1}, x_0)$ é o grupo com geradores

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, B_{m+2}, \dots, B_q$$

e relação

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \cdots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 B_{m+2} \cdots B_q = 1,$$

onde $C_i = h_{m+1}(c_i)$, $D_i = h_{m+1}(d_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ e

$$f_1 = h_{m+1}^{-1}(F_1) = [\alpha_{m+1} * \epsilon_{m+1} * \gamma_{m+1} * \bar{\epsilon}_{m+1} * \bar{\alpha}_{m+1}].$$

Suponhamos que esteja provado para $m+l < m+n = q$. Calculemos então $\pi(X_{m+l+1}, x_0)$.

$$\begin{aligned} \pi(U_{m+l+1}, x_{m+l+1}) &= \pi(X_{m+l}, x_{m+l+1}) = \\ &= \langle \{C_1, D_1, \dots, C_m, D_m, F_1, \dots, F_{m+l}, h_{m+l+1}(B_{m+l+1}) \cdots h_{m+l+1}(B_q)\}; \\ &\{C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \cdots C_m D_m C_m^{-1} D_m^{-1} F_1^2 \cdots F_{m+l}^2 h_{m+l+1}(B_{m+l+1}) \cdots B_q = 1\} \rangle, \end{aligned}$$

$$\pi(V_{m+l+1}, x_{m+l+1}) = \pi(M_{m+l+1}, x_{m+l+1}) = \langle \{F_{m+l+1}\}; \emptyset \rangle,$$

$$\pi(U_{m+l+1} \cap V_{m+l+1}, x_{m+l+1}) = \pi(b_{m+l+1}, x_{m+l+1}) = \langle \{[\beta_{m+l+1}]\}; \emptyset \rangle.$$

Pelo Teorema de Seifert-Van Kampen,

$$\pi(X_{m+l+1}, x_{m+l+1}) = \pi(U_{m+l+1} \cup V_{m+l+1}, x_{m+l+1})$$

é o grupo com geradores

$$C_1, D_1, \dots, C_m, D_m, F_1, \dots, F_{m+l+1}, h_{m+l+1}(B_{m+l+1}), \dots, h_{m+l+1}(B_q)$$

e relações

$$C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \cdots C_m D_m C_m^{-1} D_m^{-1} F_1^2 \cdots F_{m+l}^2 h_{m+l+1}(B_{m+l+1}) \cdots B_q = 1.$$

$h_{m+l+1}(B_{m+l+1}) = F_{m+l+1}^2$, pois $h_{m+l+1}(B_{m+l+1}) = [\beta_{m+l+1}]$ em X_{m+l} e $[\beta_{m+l+1}] = F_{m+l+1}^2$ em M_{l+1} .

Eliminando o gerador $h_{m+l+1}(B_{m+l+1})$, temos que $\pi(X_{m+l+1}, x_{m+l+1})$ é o grupo com geradores

$$C_1, D_1, \dots, C_m, D_m, F_1, \dots, F_{m+l+1}, h_{m+l+1}(B_{m+l+2}), \dots, h_{m+l+1}(B_q)$$

e relação

$$C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \dots C_m D_m C_m^{-1} D_m^{-1} F_1^2 \dots F_{m+l+1}^2 h_{m+l+1}(B_{m+l+2} \dots B_q) = 1.$$

Isto implica que $\pi(X_{m+l+1}, x_0)$ é o grupo com geradores

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, \dots, f_{m+l+1}, B_{m+l+2}, \dots, B_q$$

e relação

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 \dots f_{m+l+1}^2 B_{m+l+2} \dots B_q = 1,$$

onde $C_i = h_{m+1}(c_i)$, $D_i = h_{m+1}(d_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ e $f_j = h_{m+j}^{-1}(F_j) = [\alpha_{m+j} * \epsilon_{m+j} * \gamma_{m+j} * \bar{\epsilon}_{m+j} * \bar{\alpha}_{m+j}]$, $j = 1, \dots, n$.

Portanto, $\pi(X_{m+j}, x_0)$, $i = 1, 2, \dots, m$, é o grupo com geradores

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, \dots, f_{m+j}, B_{m+j+1}, \dots, B_q$$

e relação

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 \dots f_{m+j}^2 B_{m+j+1} \dots B_q = 1.$$

■

Não é imediato distinguir os grupos listados no teorema. Procedamos então do seguinte modo: abelianizamos os grupos. Isto é, se $G = \langle S_1; R \rangle$ então a *abelianização* de G é

$$AG = \langle S_1; R \cup \{xyx^{-1}y^{-1} = 1; x, y \in S_1\} \rangle.$$

Suponhamos que $n = 0$, isto é, $S = S^2 \# mT$. Então $A\pi(S, x_0)$ é o grupo com geradores $S_m = \{c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m\}$ e relações $\{r_m = 1\} \cup \{xy = yx; x, y \in S_m\}$, onde $r_m = c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1}$.

Em particular, temos a relação $c_1 d_1 = d_1 c_1$, e portanto, a relação $r_m = 1$ é consequência das relações $\{xy = yx; x, y \in S_m\}$. Então $A\pi(S, x_0)$ é o grupo $\langle S_m; \{xy = yx; x, y \in S_m\} \rangle$ e portanto $A\pi(S, x_0) \cong \mathbb{Z}^{2m}$.

Se $n \geq 1$, então $S = S^2 \# mT \# nRP^2$ e assim $A\pi(S, x_0)$ é o grupo com geradores

$$S_{m+n} = \{c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

e relações

$$\{r_{m+n} = 1\} \cup \{xy = yx; x, y \in S_{m+n}\},$$

onde $r_{m+n} = c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2$.

A relação $r_{m+n} = 1$ é consequência das relações $\{xy = yx; x, y \in S_{m+n}\}$ e $\{f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2 = 1\}$, onde a relação $\{f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2 = 1\}$ é consequência das relações $\{r_{m+n} = 1\} \cup \{xy = yx; x, y \in S_{m+n}\}$. Então,

$$A\pi(S, x_0) = \langle S_{m+n}; \{xy = yx; x, y \in S_{m+n}\} \cup \{\{f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2 = 1\}\} \rangle.$$

Agora, todo elemento de $A\pi(S, x_0)$ pode se escrito como

$$c_1^{a(1)} d_1^{b(1)} c_2^{a(2)} d_2^{b(2)} \dots c_m^{a(m)} d_m^{b(m)} f_1^{e(1)} f_2^{e(2)} \dots f_n^{e(n)},$$

onde $a(i), b(i), c(i) \in \mathbb{Z}$, e pode ser reescrito como

$$c_1^{a(1)} d_1^{b(1)} \dots c_m^{a(m)} d_m^{b(m)} f_1^{e(1)-e(n)} f_2^{e(2)-e(n)} \dots f_n^{e(n-1)-e(n)} (f_1 f_2 \dots f_n)^{e(n)}.$$

Assim, podemos ver que $A\pi(S, x_0) \cong \mathbb{Z}^{m+n-1} \times \mathbb{Z}_2$.

Corolário 15. *O grupo fundamental abelianizado*

1. *de uma superfície orientável de gênero $m \geq 0$ é \mathbb{Z}^{2m} ;*
2. *de uma superfície não orientável de gênero $n \geq 1$ é $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$.*

Assim, o grupo fundamental abelianizado de uma superfície é um invariante topológico para superfícies. O próximo resultado relaciona grupos fundamentais e superfícies.

Corolário 16. *Duas superfícies são homeomorfas se, e somente se, seus grupos fundamentais (abelianizados) são isomorfos.*

Isto decorre do teorema de classificação de superfícies e do corolário anterior.

Corolário 17. *Uma superfície é simplesmente conexa se, e somente se, é homeomorfa a esfera S^2 .*

O próximo corolário pode ser usado para determinar quando um espaço não é uma superfície.

Corolário 18. *Seja X um espaço com $x_0 \in X$. Se $A\pi(S, x_0)$ não é da forma \mathbb{Z}^{2m} ou $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$, então X não é uma superfície.*

Abstract: This work presents how the Seifert–Van Kampen theorem is an useful tool for calculating the fundamental group, which qualify topological spaces up to homeomorphism.

Keywords: Seifert–Van Kampen theorem, fundamental group.

Referências Bibliográficas

- [1] Kosniowski, C.; *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

Equação do Calor – Modelagem Matemática e Método de Fourier

Jean Cerqueira Berni¹

Orientador(a): Marta Cilene Gadotti

Resumo: O fenômeno de condução de calor em uma barra pode ser modelado por uma equação diferencial parcial. Utilizando argumentos físicos, mostraremos com detalhes como se dá a construção desse modelo, utilizaremos o método de Fourier para trabalhá-lo e discutiremos a motivação resultante deste para o aprofundamento nos conhecimentos de Análise Matemática.

Palavras-chave: Método de Fourier, modelagem, equações diferenciais parciais.

1 Dedução da Equação do Calor

Considere uma barra condutora, de dimensão linear preponderante e dimensões seccionais insignificantes, como, por exemplo, um arame bem fino, isolado termicamente do meio ambiente a não ser por suas extremidades. Se colocarmos a barra, no sentido deste seu comprimento sobre o eixo x , e aquecermos uma das extremidades, o fluxo de calor dar-se-á longitudinalmente, da extremidade mais quente para a mais fria. Deste modo, estamos tratando de um problema de condução térmica unidimensional.

Queremos uma função $u : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, t)$, que descreva a temperatura num ponto x da barra num dado instante t ; esta é nossa motivação. Para isto vamos utilizar a lei do resfriamento de Fourier.

Para descrevê-la, vamos supor que duas secções transversais da barra localizadas em x e $x + d$, de áreas iguais, A , são mantidas constantemente às temperaturas T_1 e T_2 , respectivamente.

Fourier modelou, baseado em seus experimentos, uma equação que descreve

¹Bolsista Fapesp 2009/05185-3.

a quantidade de calor transferida de uma secção transversal para outra por unidade de tempo (fluxo $\frac{Q}{\Delta t}$ de calor, cuja unidade S.I. é W , i.e., o watt [joule por segundo]) em função da área das mesmas, A , que supomos constante, da distância entre duas destas secções, d , e do módulo da diferença entre as temperaturas nestas extremidades, T_1 e T_2 .

A Lei de Fourier que modela este fenómeno, fixando um intervalo de tempo Δt , é

$$\frac{Q}{\Delta t} \propto \frac{A \cdot |T_2 - T_1|}{d}$$

onde Q é a quantidade de calor absorvida ou cedida por um material, medida em joules, J , A é a área da secção transversal da barra, T_1 e T_2 são as temperaturas nas extremidades e d é o comprimento da mesma. Inserimos uma constante de proporcionalidade que se chama condutibilidade térmica, κ , e temos

$$\frac{Q}{\Delta t} = \kappa \frac{A \cdot |T_2 - T_1|}{d}. \quad (1.1)$$

A Lei de Fourier trata T_1 e T_2 como constantes, sendo assim independente do tempo; mas precisamos de uma função que descreva de modo mais completo a situação da barra, i.e., uma função que descreva a temperatura (dependente do fluxo do calor, $\frac{Q}{\Delta t}$) em função do tempo e de sua coordenada espacial.

Para contornar a dificuldade da ausência da variável tempo na Lei de Fourier, introduzimos a grandeza fluxo de calor através de x num instante t , do seguinte modo:

- Consideraremos que o calor está fluindo da extremidade mais quente para a extremidade mais fria;
- Fixamos o tempo em (1.1) e fazemos $T_2 = u(x + d, t)$ e $T_1 = u(x, t)$;
- Passamos o limite da função $u(x + d, t) - u(x, t)$ quando d tende a zero em (1.1).

Assim, se denotarmos por $q(x, t)$ o fluxo de calor no sentido positivo do eixo x no instante t , temos

$$q(x, t) := \kappa A \lim_{d \rightarrow 0} \frac{|u(x + d, t) - u(x, t)|}{d} = \kappa A \lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(x + d, t) - u(x, t)}{d}. \quad (1.2)$$

Como a temperatura decresce conforme x cresce, introduzimos um sinal $(-)$ em (1.2), pois o calor flui para a direita e, *ipso facto*, q deve ser positivo, isto é,

$$q(x, t) = -\kappa A \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Fixemos, agora, para $\delta > 0$, um elemento entre os pontos x_0 e $x_0 + \delta$, ao longo do eixo x . Calcularemos o calor que entra neste ponto no período de tempo entre t_0 e $t_0 + \tau$, com $\tau > 0$. Defina então \bar{q} como sendo a quantidade de calor que entra na região delimitada por x_0 e $x_0 + \delta$ num intervalo de tempo arbitrário, de t_0 a $t_0 + \tau$. Esta quantidade é escrita como

$$\bar{q} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t) dt.$$

Pela Lei de Fourier, (1.3), temos

$$\bar{q} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \kappa \left[\frac{\partial u(x_0 + \delta, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial x} \right] A dt.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\bar{q} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \kappa A dx dt. \quad (1.4)$$

Por outro lado, sabemos, da física básica, que

$$\bar{q} = mc\Delta\theta = \rho V c \Delta\theta = \rho V c [u(x_0, t_0 + \tau) - u(x_0, t_0)],$$

onde ρ é a densidade volumétrica da barra, c o calor específico do material do qual esta é constituída, V o volume desta e $\Delta\theta$ o incremento de temperatura num dado intervalo de tempo.

Temos então

$$\bar{q} = \rho V c [u(x_0, t_0 + \tau) - u(x_0, t_0)].$$

Mas observe que

$$V = A \int_{x_0}^{x_0+\delta} dx.$$

Então

$$\bar{q} = \rho A c \int_{x_0}^{x_0+\delta} [u(x_0, t_0 + \tau) - u(x_0, t_0)] dx.$$

E usando novamente o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\bar{q} = \rho A c \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt dx. \quad (1.5)$$

Comparando as equações (1.4) e (1.5) temos que

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} c \rho A dt dx = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \kappa A dx dt.$$

Chegamos em

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \kappa A - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} c \rho A \right) dt dx = 0.$$

Denotaremos

$$\Gamma(x, t) = \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \kappa A - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} c \rho A \right).$$

O argumento da integral acima, $\Gamma(x, t)$, é contínuo pois suporemos que $u(x, t)$ é de classe C^2 , pelo menos. Afirmamos que $\Gamma(x, t)$ denotado acima é identicamente nulo.

Suponhamos, *ab absurdo*, que este seja não-nulo. Então $\Gamma(x, t)$ seria positivo ou negativo para algum $(x_0, t_0) \in R$. Suponha-o, sem perda de generalidade, positivo. Como este argumento é contínuo, segue que existe uma bola aberta B , de centro (x_0, t_0) e raio r tal que $\Gamma(x, t) > 0, \forall (x, t) \in B$, o que implicaria na existência de $\tau' < r$ e $\delta' < r$ tais que

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau'} \int_{x_0}^{x_0+\delta'} \Gamma(x, t) dt dx > 0,$$

o que é absurdo. Logo, segue o fato.

Portanto

$$\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \rho \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\kappa}{c \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Denominamos $\frac{\kappa}{c \rho}$ por difusibilidade térmica, k , assim, podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.6)$$

A equação (1.6) é conhecida por *equação do calor* ou *equação da difusão*.

Deduzida esta equação, uma questão surge naturalmente: “como descrever as funções $u(x, t)$ que satisfazem (1.6)?”

Observe que qualquer constante é solução de (1.6), e a função $u(x, t) = cx$ também o é. Enfim, existem muitas outras; a determinação da solução procurada depende de fatores físicos. Algumas das condições que interferem fortemente na determinação da solução estão listadas abaixo.

I. Condição inicial do problema. Podemos ter uma função $f(x)$ que descreve a temperatura em cada ponto x da barra no instante $t = 0$, i.e., $u(x, 0) = f(x)$, onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

II. Condição de contorno do problema. Podem ser de vários tipos:

Tipo 1: As temperaturas nas extremidades são conhecidas e constantes.

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2.$$

Num caso mais complexo, podemos ter que a temperatura num ponto de coordenada x da barra no instante $t = 0$ ser expresso por uma função

$$u(0, t) = h_0(t) \quad \text{e} \quad u(L, t) = h_1(t).$$

Tipo 2: Temos as extremidades isoladas termicamente, i.e., não há fluxo de calor nas extremidades

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0.$$

Tipo 3: Há transferência entre o meio e as extremidades. Para abordarmos este tipo precisaremos da seguinte definição:

Definição 1 (Emissividade). Em física, emissividade é relação entre o poder emissivo de um corpo qualquer e a de um corpo negro. É conhecida como emissividade, e , e pode ter um máximo igual a 1, que é correspondente à de

um corpo negro, e um mínimo igual a zero. Corpos que possuem emissividade inferior a 1 são chamados corpos cinza. Corpos onde a emissividade é também dependente da temperatura e comprimento de onda são chamados corpos não-cinza. A emissividade mede a maior ou menor tendência que determinado corpo tem em emitir radiação. O poder de emissividade está associado à natureza do corpo, à área exposta e à temperatura absoluta a que se encontra.

$$\kappa \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = e\{u(0, t) - u_0\}, \quad -\kappa \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = e\{u(L, t) - u_0\}.$$

Tipo 4: Qualquer combinação dos casos anteriores.

2 Formulação Matemática

Considere o plano cartesiano de eixos x e t , onde t será a nossa coordenada temporal e x será a nossa coordenada espacial. Queremos definir uma função real $u(x, t)$ no fecho do conjunto $R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / 0 < t < \infty, 0 < x < L\}$, \overline{R} , que satisfaça

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

em R , além da condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in (0, L)$$

e da condição de fronteira

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Este tipo de problema é conhecido como “problema de valores iniciais e de contorno”. Um método para resolver este tipo de equação foi desenvolvido por Fourier, e o veremos a seguir.

Método de Fourier: Supomos inicialmente que a função procurada $u(x, t)$ pode ser escrita como o produto de duas funções, uma exclusivamente dependente de x e outra exclusivamente dependente de t , isto é, da forma

$$u(x, t) = F(x)G(t). \tag{1.7}$$

Substituindo (1.7) na equação do calor, teremos

$$F(x)G'(t) = kF''(x)G(t) \iff \frac{1}{k} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Observe que aqui supusemos $F(x)$ e $G(t)$ nunca se anularem. Concluímos da equação acima que os quocientes não podem depender nem de x nem de t , de modo que deve ser uma constante, σ ,

$$\frac{1}{k} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma.$$

Agora, reduzimos o problema de resolver uma equação diferencial parcial ao problema de resolver duas equações diferenciais parciais. Resolvamos uma delas:

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0. \tag{1.8}$$

Como $u(0, t) = u(L, t) = 0$, segue que

$$F(0)G(t) = F(L)G(t) = 0, \quad \forall t > 0,$$

o que implica $F(0) = F(L) = 0$ pois $G(t) \equiv 0$ não nos interessa. Resolvendo o problema do valor de contorno

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0, \\ F(0) = 0, \\ F(L) = 0, \end{cases}$$

teremos três possíveis valores de σ a analisar:

i) $\sigma > 0$, obtemos

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Para satisfazer o problema do valor inicial temos que ter

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, & \text{pois } F(0) = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} = 0, & \text{pois } F(L) = 0, \end{cases}$$

o que implica $c_1 = c_2 = 0$ e $F(x) \equiv 0$ não nos interessa.

ii) $\sigma = 0$,

$$F(x) = c_1x + c_2.$$

Com $c_2 = 0$ e $c_1L + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$, uma solução trivial que tampouco nos interessa.

iii) $\sigma < 0$. Fazemos $\sigma = -\lambda^2$, para facilitar os cálculos. Temos

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x),$$

que deverá satisfazer

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 \sin(\lambda L) = 0. \end{cases}$$

Como, novamente, não queremos uma solução identicamente nula, i.e., $c_2 = 0$, então devemos ter

$$c_2 \sin(\lambda L) = 0, \quad \text{com } c_2 \neq 0 \Leftrightarrow \sin(\lambda L) = 0,$$

o que implica que

$$\lambda L = n\pi, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

Assim, $\lambda = \frac{n\pi}{L}$,

$$\sigma = -\lambda^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Como para cada n temos um λ diferente, então

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2},$$

e são designados os autovalores do Problema do Valor de Contorno.

Chegamos à conclusão de que as funções que satisfazem à equação diferencial ordinária (1.8) são

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

que serão designadas as autofunções do Problema do Valor de Contorno.

Não é necessário que consideremos $n < 0$ pois isso implicaria numa mera mudança de sinal em $F_n(x)$.

Agora, resta-nos achar a solução geral da outra equação diferencial ordinária em t , a saber,

$$G'(t) - \sigma k G(t) = 0, \quad (1.9)$$

que será, para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$G_n(t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt},$$

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t).$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos uma função

$$u_n(x, t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

que satisfaz à equação do calor e às condições de fronteira dadas. É fácil verificar que qualquer combinação linear destas funções também é solução, porém nos falta ainda verificar a condição inicial. Assim, definimos como candidato à solução do problema:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde c_n é constante, para cada n . Observamos que esta função é descrita por uma série de funções e, portanto, precisaremos de critérios para decidir sua convergência. Por hipótese, $u(x, 0) = f(x)$, o que implica

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

o que sugere que a função f deve ser escrita como uma série de senos.

E o método de Fourier culmina na indicação deste candidato como solução. O que faltará fazer é provar que ele realmente é solução do problema dado, o que implica em vários problemas.

Problema 1: Será que a função dada, $f(x)$, pode ser escrita como uma série de senos? Se não puder, então $u(x, t)$ como a encontramos não servirá como solução. Aí deveremos ver em que condições $f(x)$ pode ser escrita dessa forma, bem como obter os coeficientes c_n para esta.

Problema 2: Sendo a função $u(x, t)$ descrita em termos de uma série, é mais que natural levantarmos a questão sobre as condições de convergência e se, de fato, esta satisfaz à equação diferencial parcial dada.

Se levarmos o assunto adiante, constataremos que ele nos conduz naturalmente ao estudo de conceitos como o de convergência uniforme de séries de funções, a que classe de funções pertence $f(x)$ (de classe \mathcal{L}^1 ? Periódica? Absolutamente Integrável? Integrável?), o critério de Cauchy para a verificação da convergência de tais séries, a completude do espaço onde estamos trabalhando, a importância da compacidade do domínio de certas funções que consideramos, dentre inúmeros outros assuntos.

A dedução da equação do calor nos leva, assim, a uma maravilhosa fonte de motivações para estudos de análise matemática ao nos apresentar uma aplicação “palpável” desta no cotidiano, mostrando-nos a complexidade e a utilidade das equações diferenciais parciais.

Agradecimentos: À professora Marta Cilene Gadotti, por ter me acolhido neste projeto tão profícuo, ter-me dado todo o seu paciente e incansável apoio e por ter sido uma mentora tão boa e dedicada, dando toda a assessoria imprescindível à realização e efetivação deste projeto.

Abstract: The phenomenon of the heat conduction in a straight bar can be modelled through a partial differential equation. In this paper, using physical arguments, we must show with details how this model is constructed, use the Fourier’s method to work it, and discuss its resulting motivations to go further with our mathematical analysis knowledges.

Keywords: Fourier method, modelation, partial differential equations.

Referências Bibliográficas

- [1] Figueiredo, D.G.; *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.
- [2] Tagliaro, A.; *Física, volume 2*, Editora F.T.D., S.A., 1966.
- [3] www.wikipedia.org, acesso em 30/7/2009.

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA – BICMAT

Orientação aos autores

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem \LaTeX , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat, assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.

