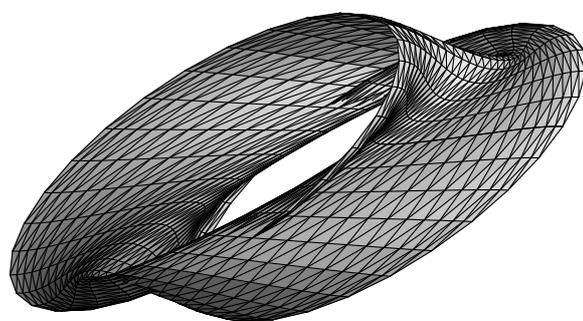


ISSN 1980-024X

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
EM MATEMÁTICA – BICMAT



VOLUME VII
OUTUBRO DE 2010
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IGCE – RIO CLARO

unesp 

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM
MATEMÁTICA – BICMAT

Comissão editorial

Elíris Cristina Rizzioli
Nativi Viana Pereira Bertolo
Renata Zotin Gomes de Oliveira
Thiago de Melo

Editoração gráfica

Thiago de Melo

Realização

Conselho de Curso de Graduação em Matemática
Departamento de Matemática
IGCE – Unesp – Rio Claro

EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de iniciação científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE – Unesp – Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat, com ISSN 1980-024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de iniciação científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este número estará disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço www.rc.unesp.br/igce/matematica

SUMÁRIO

<i>Sequências Exatas e Grupos Abelianos Livres</i>	
Aline Cristina de Souza	7
<i>Codimensão de Germes em \mathcal{E}_n</i>	
Daiane Alice Henrique	19
<i>Os Modelos de Montroll, Gompertz e Smith para Dinâmica de Populações</i>	
Francielle Santo Pedro	39
<i>Introdução à Teoria das Equações Diferenciais com Retardamento</i>	
Maria Carolina Stefani Mesquita Macena	45
<i>Distribuição Gama e Aplicações</i>	
Maria Cristina Martins	55
<i>A Integral de Riemann–Stieltjes e o Espaço Dual de $C([a, b])$</i>	
Victor Simões Barbosa	61

Sequências Exatas e Grupos Abelianos Livres

Aline Cristina de Souza

Orientador(a): Prof. Dr. João Peres Vieira

Resumo: Neste trabalho desenvolvemos o estudo de dois tópicos da Álgebra: grupos abelianos livres e sequências exatas de grupos abelianos, que são de grande utilidade para a resolução de problemas da Topologia Algébrica.

Palavras-chave: sequências exatas; grupos abelianos livres

1 Sequências Exatas

Nesta seção apresentamos a definição de sequências exatas de grupos abelianos e como resultados mais úteis destacamos os corolários 3 e 5 dos teoremas 2 e 4, respectivamente.

Definição 1. Sejam A_1, A_2, A_3 grupos abelianos e ϕ_1, ϕ_2 homomorfismos. A sequência

$$A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} A_3,$$

é exata em A_2 se, e somente se, $\ker(\phi_2) = \text{Im}(\phi_1)$.

Teorema 2. Dada uma sequência exata

$$P \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\gamma} S \xrightarrow{0} \{0\}$$

e um homomorfismo $\delta : S \rightarrow R$ com $\gamma\delta = 1_S$, então a sequência

$$P \xrightarrow{\{\alpha, 0\}} Q \oplus S \xrightarrow{(\beta, \delta)} R \xrightarrow{0} \{0\}$$

é exata.

Prova: Mostremos que a sequência $*$: $P \xrightarrow{\{\alpha, 0\}} Q \oplus S \xrightarrow{(\beta, \delta)} R \xrightarrow{0} \{0\}$ é exata em $Q \oplus S$, isto é, que $\ker(\beta, \delta) = \text{Im}\{\alpha, 0\}$. De fato:

$(x, y) \in \ker(\beta, \delta) \implies (\beta, \delta)(x, y) = 0 \implies \gamma(\beta, \delta)(x, y) = \gamma(0) \implies \gamma(\beta(x) + \delta(y)) = 0 \implies \gamma\beta(x) + \gamma\delta(y) = 0 \implies 0(x) + 1_S(y) = 0 \implies y = 0 \implies (\beta, \delta)(x, 0) = 0 \implies \beta(x) + \delta(0) = 0 \implies \beta(x) = 0 \implies x \in \ker \beta = \text{Im } \alpha \implies x = \alpha(p), p \in P \implies (x, y) = (\alpha(p), 0) = (\alpha(p), 0(p)) = \{\alpha, 0\}(p), p \in P \implies (x, y) \in \text{Im}\{\alpha, 0\}$. Portanto $\ker(\beta, \delta) \subset \text{Im}\{\alpha, 0\}$;

$\forall p \in P, (\beta, \delta)\{\alpha, 0\}(p) = (\beta, \delta)(\alpha(p), 0(p)) = (\beta, \delta)(\alpha(p), 0) = \beta\alpha(p) + \delta(0) = \beta\alpha(p) = 0$. Portanto $\text{Im}\{\alpha, 0\} \subset \ker(\beta, \delta)$.

Logo $\ker(\beta, \delta) = \text{Im}\{\alpha, 0\}$ e a sequência $*$ é exata em $Q \oplus S$.

Mostremos agora que a sequência $*$ é exata em R , isto é, que $R = \ker(0) = \text{Im}(\beta, \delta)$. De fato:

$\text{Im}(\beta, \delta) \subset R$ por definição de subgrupo.

$r \in R \implies \gamma(r) \in S \implies 1_S\gamma(r) = \gamma(r) \implies \gamma\delta\gamma(r) = \gamma(r) \implies \gamma(r) - \gamma\delta\gamma(r) = 0 \implies \gamma(r - \delta\gamma(r)) = 0 \implies r - \delta\gamma(r) \in \ker \gamma = \text{Im } \beta \implies r - \delta\gamma(r) = \beta(q), q \in Q \implies r = \beta(q) + \delta\gamma(r) = (\beta, \delta)(q, \gamma(r)) \implies r \in \text{Im}(\beta, \delta)$. Portanto $R \subset \text{Im}(\beta, \delta)$.

Logo $R = \ker(0) = \text{Im}(\beta, \delta)$ e a sequência $*$ é exata em R .

Assim, concluímos que a sequência $*$: $P \xrightarrow{\{\alpha, 0\}} Q \oplus S \xrightarrow{(\beta, \delta)} R \xrightarrow{0} \{0\}$ é exata. ■

Corolário 3. Dada uma sequência exata $\{0\} \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\gamma} S \xrightarrow{0} \{0\}$ e $\delta : S \rightarrow R$, com $\gamma\delta = 1_S$, a função $(\beta, \delta) : Q \oplus S \rightarrow R$ é um isomorfismo.

Prova: Fazendo $P = \{0\}, \alpha = i$, pelo teorema 2, $\{0\} \xrightarrow{\{i, 0\}} Q \oplus S \xrightarrow{(\beta, \delta)} R \xrightarrow{0} \{0\}$ é exata. Assim, $\{0\} \xrightarrow{\{i, 0\}} Q \oplus S \xrightarrow{(\beta, \delta)} R$ é exata em $Q \oplus S$ e $Q \oplus S \xrightarrow{(\beta, \delta)} R \xrightarrow{0} \{0\}$ é exata em R . Portanto (β, δ) é injetor e (β, δ) é sobrejetor. Logo (β, δ) é bijetor e (β, δ) é isomorfismo. ■

Quando existe um homomorfismo tal como δ no corolário acima, dizemos que a sequência esplita. Também dizemos que R esplita como soma de Q e S .

Teorema 4. Dada uma sequência exata $X \xrightarrow{\{\alpha, \beta\}} A \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} A' \oplus B' \xrightarrow{(\alpha', \beta')} X'$ tal que $d : B \rightarrow B'$ é um isomorfismo, então a sequência $X \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{a-bd^{-1}c} X'$

$A' \xrightarrow{\alpha'} X'$ é exata, e também $\ker \alpha = \ker\{\alpha, \beta\}$, $\text{Im } \alpha' = \text{Im}(\alpha', \beta')$.

Prova: Como a sequência $*$: $X \xrightarrow{\{\alpha, \beta\}} A \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} A' \oplus B' \xrightarrow{(\alpha', \beta')} X'$ é exata em $A \oplus B$,

$$0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta \\ c\alpha + d\beta \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a\alpha + b\beta = 0 \\ c\alpha + d\beta = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Como d é isomorfismo, existe d^{-1} . Assim,

$$\begin{aligned} c\alpha + d\beta = 0 &\implies d^{-1}(c\alpha + d\beta) = 0 \\ &\implies d^{-1}c\alpha + d^{-1}d\beta = 0 \implies \beta = -d^{-1}c\alpha \end{aligned} \quad (1.2)$$

$x \in \ker \alpha \implies \alpha(x) = 0 \implies \beta(x) = -d^{-1}c\alpha(x) = 0$. Portanto $\{\alpha, \beta\}(x) = (\alpha(x), \beta(x)) = (0, 0) \implies x \in \ker\{\alpha, \beta\}$.

Portanto

$$\ker \alpha \subset \ker\{\alpha, \beta\} \quad (1.3)$$

$z \in \ker\{\alpha, \beta\} \implies (\alpha(z), \beta(z)) = (0, 0) \implies \alpha(z) = 0 \implies z \in \ker \alpha$. Portanto

$$\ker\{\alpha, \beta\} \subset \ker \alpha \quad (1.4)$$

Logo, por (1.3) e (1.4), $\ker \alpha = \ker\{\alpha, \beta\}$.

Provemos que a sequência \diamond : $X \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{a-bd^{-1}c} A' \xrightarrow{\alpha'} X'$ é exata em A , isto é, que $\ker(a - bd^{-1}c) = \text{Im } \alpha$.

$y \in \text{Im } \alpha \implies y = \alpha(x), x \in X \implies (a - bd^{-1}c)(y) = a(y) - bd^{-1}c(y) = a(\alpha(x)) - bd^{-1}c(\alpha(x)) = a\alpha(x) - bd^{-1}c\alpha(x) \stackrel{(1.1)}{=} -b\beta(x) + b(-d^{-1}c\alpha)(x) \stackrel{(1.2)}{=} -b\beta(x) + b\beta(x) = 0 \implies y \in \ker(a - bd^{-1}c)$. Portanto

$$\text{Im } \alpha \subset \ker(a - bd^{-1}c) \quad (1.5)$$

$$z \in \ker(a - bd^{-1}c) \implies (a - bd^{-1}c)(z) = 0 \implies a(z) - bd^{-1}c(z) = 0. \quad (1.6)$$

Seja $w = -d^{-1}c(z)$. Então

$$d(w) = -c(z) \implies c(z) + d(w) = 0. \quad (1.7)$$

Por outro lado, de (1.6) temos que

$$a(z) + b(w) = 0. \quad (1.8)$$

De (1.7) e (1.8) segue que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z, w) = (0, 0)$. Portanto $(z, w) \in \ker \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{Im}\{\alpha, \beta\}$. Logo $(z, w) = (\alpha(x), \beta(x))$, para algum $x \in X$. Assim $z = \alpha(x)$, para algum $x \in X$. Portanto $z \in \text{Im } \alpha$ e

$$\ker(a - bd^{-1}c) \subset \text{Im } \alpha. \quad (1.9)$$

De (1.5) e (1.9), segue que $\text{Im } \alpha = \ker(a - bd^{-1}c)$ e a sequência é exata em A .

Provemos, agora, que a sequência $\diamond : X \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{a - bd^{-1}c} A' \xrightarrow{\alpha'} X'$ é exata em A' , isto é, que $\ker(\alpha') = \text{Im}(a - bd^{-1}c)$.

Como a sequência $*$ é exata em $A' \oplus B'$, $\ker(\alpha', \beta') = \text{Im} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Logo $(\alpha', \beta') \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \implies (\alpha'a + \beta'c, \alpha'b + \beta'd) = 0 \implies \forall (u, v) \in A \oplus B, (\alpha'a + \beta'c, \alpha'b + \beta'd)(u, v) = 0$.

Em particular, para $(0, v) \in A \oplus B$,

$$(\alpha'a + \beta'c, \alpha'b + \beta'd)(0, v) = 0 \implies (\alpha'a + \beta'c)(0) + (\alpha'b + \beta'd)(v) = 0,$$

$$\forall v \in B \implies (\alpha'b + \beta'd)(v) = 0, \forall v \in B \implies \alpha'b + \beta'd = 0 \implies \beta'd = -\alpha'b.$$

Assim,

$$\beta' = -\alpha'bd^{-1} \quad (1.10)$$

Por outro lado, para $(u, 0) \in A \oplus B$, $(\alpha'a + \beta'c, \alpha'b + \beta'd)(u, 0) = 0 \implies (\alpha'a + \beta'c)(u) + (\alpha'b + \beta'd)(0) = 0, \forall u \in A \implies (\alpha'a + \beta'c)(u) = 0, \forall u \in A \implies \alpha'a + \beta'c = 0$. Mas $\beta' = -\alpha'bd^{-1}$ e portanto $\alpha'a + (-\alpha'bd^{-1})c = 0$ e assim $\alpha'(a - bd^{-1}c) = 0$. Logo

$$\text{Im}(a - bd^{-1}c) \subset \ker \alpha'. \quad (1.11)$$

$p \in \ker \alpha' \implies \alpha'(p) = 0 \implies (\alpha', \beta')(p, 0) = \alpha'(p) + \beta'(0) = 0 \implies (p, 0) \in \ker(\alpha', \beta') = \text{Im} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies (p, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (u, v), (u, v) \in A \oplus B \implies$

$$(au + bv, cu + dv) = (p, 0), (u, v) \in A \oplus B \implies \begin{cases} a(u) + b(v) = p \\ c(u) + d(v) = 0 \end{cases} \implies v = -d^{-1}c(u) \text{ e } p = a(u) - bd^{-1}c(u) = (a - bd^{-1}c)(u), u \in A \implies p \in \text{Im}(a - bd^{-1}c).$$

Portanto

$$\ker \alpha' \subset \text{Im}(a - bd^{-1}c) \quad (1.12)$$

De (1.11) e (1.12) segue que $\ker \alpha' = \text{Im}(a - bd^{-1}c)$ e portanto a sequência \diamond é exata em A' .

$z \in \text{Im}(\alpha', \beta') \implies z = (\alpha', \beta')(a', b')$, para algum $(a', b') \in A' \oplus B' \implies z = \alpha'(a') + \beta'(b')$, $a' \in A'$ e $b' \in B' \xrightarrow{(1.10)} z = \alpha'(a') + (-\alpha'bd^{-1})(b')$, $a' \in A'$ e $b' \in B' \implies z = \alpha'(a' - bd^{-1}b')$, com $a' - bd^{-1}b' \in A' \implies z \in \text{Im} \alpha'$. Portanto

$$\text{Im}(\alpha', \beta') \subset \text{Im} \alpha'. \quad (1.13)$$

Seja $w \in \text{Im} \alpha'$. Assim, $w = \alpha'(a')$, $a' \in A'$. Tome $(a', 0) \in A' \oplus B'$. Então, $(\alpha', \beta')(a', 0) = \alpha'(a') + \beta'(0) = w + 0 = w$. Portanto $w \in \text{Im}(\alpha', \beta')$ e

$$\text{Im} \alpha' \subset \text{Im}(\alpha', \beta') \quad (1.14)$$

De (1.13) e (1.14) segue que $\text{Im} \alpha' = \text{Im}(\alpha', \beta')$ ■

Corolário 5. Se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \oplus B \longrightarrow A' \oplus B'$ é um isomorfismo e $d : B \longrightarrow B'$ é um isomorfismo, então A, A' são isomorfos. Em particular, se $b = 0$ ou $c = 0$, a é um isomorfismo.

Prova: Fazendo $X = X' = \{0\}$, pelo teorema 4 a sequência $\Delta : \{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{a - bd^{-1}c} A' \longrightarrow \{0\}$ é exata. Portanto $a - bd^{-1}c : A \longrightarrow A'$ é um homomorfismo injetor, pois Δ é exata em A e é sobrejetor porque Δ é exata em A' . Portanto $a - bd^{-1}c$ é um homomorfismo bijetor entre A e A' . Logo A e A' são isomorfos. Se $b = 0$ ou $c = 0$, $a - bd^{-1}c = a$ e portanto a é isomorfismo. ■

2 Grupos Abelianos Livres

Nesta seção definiremos axiomáticamente grupos abelianos livres e construiremos, para um conjunto X , o grupo abeliano livre gerado por X .

Definição 6. Dados um conjunto X , um grupo abeliano G e uma função $i : X \rightarrow G$. Então (G, i) tem a propriedade universal para X se, para qualquer grupo abeliano A e função $j : X \rightarrow A$, existe um único homomorfismo $\phi : G \rightarrow A$, com $j = \phi \circ i$. Quando isto acontece, dizemos que G é um grupo abeliano livre sobre os geradores $i(X)$. O número cardinal de X é chamado posto de G .

Proposição 7. Seja $X = \{x\}$, \mathbb{Z} o grupo abeliano aditivo e $i : X \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $i(x) = 1$. Então (\mathbb{Z}, i) tem a propriedade universal para X . Neste caso dizemos que \mathbb{Z} é um grupo abeliano livre sobre $i(X) = \{1\}$ e, como o número cardinal de X é 1, dizemos que \mathbb{Z} tem posto 1.

Prova: Seja A um grupo abeliano e $j : X = \{x\} \rightarrow A$ uma função, isto é, existe um único $a \in A$ tal que $j(x) = a$.

Considere $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow A$ definido por: $\phi(0) = 0$, $\phi(n) = na$, onde

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}}, & \text{se } n > 0 \\ \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{(-n) \text{ vezes}}, & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Mostremos que ϕ é homomorfismo. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$.

1) Se $m < 0$ e $n < 0$:

$$\begin{aligned} \phi(m+n) &= (m+n)a = \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{-(m+n) \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{(-m) \text{ vezes}} + \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{(-n) \text{ vezes}} \\ &= ma + na = \phi(m) + \phi(n). \end{aligned}$$

2) Se $m < 0$ e $n = 0$:

$$\phi(m+n) = \phi(m+0) = \phi(m) = ma = ma + 0 = \phi(m) + \phi(0) = \phi(m) + \phi(n).$$

3) Se $m < 0$ e $n > 0$:

3.1) $m < 0 < m + n < n$:

$$\begin{aligned} \phi(m) + \phi(n) &= ma + na = \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{(-m) \text{ vezes}} + \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{-m \text{ vezes}} + \underbrace{a + \cdots + a}_{m+n \text{ vezes}} + \underbrace{a + \cdots + a}_{-m \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{a + \cdots + a}_{m+n \text{ vezes}} = (m+n)a = \phi(m+n). \end{aligned}$$

3.2) $m < 0 = m + n < n$:

$$\phi(m+n) = \phi(0) = 0$$

$$\phi(m) + \phi(n) = ma + na = ma + (-m)a = \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{(-m) \text{ vezes}} + \underbrace{a + \cdots + a}_{-m \text{ vezes}} = 0.$$

Portanto $\phi(m+n) = \phi(m) + \phi(n)$.

3.3) $m < m + n < 0 < n$:

$$\begin{aligned} \phi(m) + \phi(n) &= \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{-m \text{ vezes}} + \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{-(m+n) \text{ vezes}} + \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{n \text{ vezes}} + \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{-(m+n) \text{ vezes}} = (m+n)a = \phi(m+n). \end{aligned}$$

4) Se $m = 0$ e $n = 0$:

$$\phi(m+n) = \phi(0+0) = \phi(0) = 0 = 0+0 = \phi(0) + \phi(0) = \phi(m) + \phi(n).$$

5) Se $m = 0$ e $n > 0$:

$$\phi(m+n) = \phi(0+n) = \phi(n) = na = 0 + na = \phi(0) + \phi(n) = \phi(m) + \phi(n).$$

6) Se $m > 0$ e $n > 0$:

$$\begin{aligned}\phi(m+n) &= (m+n)a \\ &= \underbrace{a + \cdots + a}_{m+n \text{ vezes}} = \underbrace{a + \cdots + a}_m + \underbrace{a + \cdots + a}_n \\ &= ma + na = \phi(m) + \phi(n).\end{aligned}$$

Portanto ϕ é homomorfismo. Além disso, $\phi \circ i(x) = \phi(1) = a = j(x) \implies \phi \circ i = j$. Suponha que exista ψ homomorfismo tal que $\psi \circ i(x) = j(x)$. Então, $\psi(1) = a = \phi(1)$ e $\psi(0) = 0 = \phi(0)$.

Se $n > 0$,

$$\begin{aligned}\psi(n) &= \psi(\underbrace{1 + \cdots + 1}_n) = \underbrace{\psi(1) + \cdots + \psi(1)}_n = \underbrace{a + \cdots + a}_n = na = \phi(n), \\ \psi(-n) &= \psi(\underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_n) = \underbrace{\psi(-1) + \cdots + \psi(-1)}_n \\ &= \underbrace{(-\psi(1)) + \cdots + (-\psi(1))}_n = \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_n = (-n)a = \phi(-n).\end{aligned}$$

Portanto $\psi = \phi$. Logo, por definição, (\mathbb{Z}, i) tem a propriedade universal para X . ■

Denotaremos por $\text{Hom}(\mathbb{Z}, A)$ o conjunto de todos os homomorfismos $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$

Corolário 8. Para qualquer grupo abeliano A , a função $ev : \text{Hom}(\mathbb{Z}, A) \rightarrow A$, definida por $ev(f) = f(1)$ é um isomorfismo.

Prova: $ev(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = ev(f) + ev(g)$. Portanto ev é homomorfismo. Para qualquer $a \in A$, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \{a\} & \\ j \swarrow & & \searrow i \\ A & \xleftarrow{\exists! f} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Como, pela proposição 7, (\mathbb{Z}, i) tem a propriedade universal para $\{a\}$, existe um único homomorfismo $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$ tal que $f \circ i = j$. Logo, existe um único

$f \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, A)$ tal que $f \circ i(a) = j(a)$, isto é $ev(f) = f(1) = a$. Portanto ev é bijetor. Logo ev é isomorfismo. ■

Proposição 9. *Sejam A e G grupos abelianos. Se a sequência $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ é exata e B é um grupo abeliano livre, então a sequência esplita.*

Prova: Dado um conjunto X e uma função $b : X \rightarrow B$, defina $g : X \rightarrow G$ da seguinte maneira: $\forall x \in X$, $g(x)$ é o elemento de G tal que $p(g(x)) = b(x)$.

Como B é abeliano livre, (B, b) tem a propriedade universal para X . Então para o grupo abeliano G e a função $g : X \rightarrow G$, existe um único homomorfismo $\phi : B \rightarrow G$ tal que $\phi \circ b = g$. Então, $p \circ \phi \circ b = p \circ g = b$.

Como (B, b) tem a propriedade universal para X , para o grupo abeliano B e a função $b : X \rightarrow B$, existe um único homomorfismo $\psi : B \rightarrow B$ tal que $\psi \circ b = b$. Como $1_B \circ b = b$ e $(p \circ \phi) \circ b = b$ então $p \circ \phi = 1_B$. ■

Assim, se a sequência de grupos abelianos $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ é exata, com B abeliano livre, segue pelo corolário 3 que $G \cong A \oplus B$.

Proposição 10. *Suponha que (G, i) e (H, j) tenham ambos a propriedade universal para X . Então existe um único isomorfismo $\phi : G \rightarrow H$, com $j = \phi \circ i$.*

Prova: Como (G, i) tem a propriedade universal para X , para o grupo abeliano H e função $j : X \rightarrow H$ existe um único homomorfismo $\phi : G \rightarrow H$ tal que $\phi \circ i = j$. Também, como (H, j) tem a propriedade universal para X , para o grupo abeliano G e função $i : X \rightarrow G$ existe um único homomorfismo $\psi : H \rightarrow G$ tal que $\psi \circ j = i$. Além disso, temos que $\phi \circ (\psi \circ j) = \phi \circ i = j$ e $1_H \circ j = j$. Assim $\phi \circ \psi = 1_H$. Também, $\psi \circ (\phi \circ i) = \psi \circ j = i$ e $1_G \circ i = i$. Portanto $\psi \circ \phi = 1_G$, pois (G, i) tem a propriedade universal para X . Logo ϕ é bijetor. Portanto ϕ é um isomorfismo e G e H são isomorfos. ■

Proposição 11. *Suponha que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ e que (G_1, i_1) tenha a propriedade universal para X_1 e (G_2, i_2) tenha a propriedade universal para X_2 . Então $(G_1 \oplus G_2, i)$ tem a propriedade universal para $X_1 \cup X_2$ onde $i : X_1 \cup X_2 \rightarrow$*

$G_1 \oplus G_2$ é definida por:

$$i(x) = \begin{cases} (i_1(x), 0), & \text{se } x \in X_1 \\ (0, i_2(x)), & \text{se } x \in X_2 \end{cases}$$

Prova: Dado um grupo abeliano A e uma função $j : X_1 \cup X_2 \rightarrow A$, devemos provar que existe um único homomorfismo $\phi : G_1 \oplus G_2 \rightarrow A$ tal que $\phi \circ i = j$. Considere $K_i : X_i \rightarrow X_1 \cup X_2$, $i = 1, 2$ as inclusões naturais.

Para a aplicação $j \circ K_1 : X_1 \rightarrow A$, existe um único homomorfismo $\phi_1 : G_1 \rightarrow A$ tal que $\phi_1 \circ i_1 = j \circ K_1$ e para a aplicação $j \circ K_2 : X_2 \rightarrow A$, existe um único homomorfismo $\phi_2 : G_2 \rightarrow A$ tal que $\phi_2 \circ i_2 = j \circ K_2$.

Defina $\phi = (\phi_1, \phi_2) : G_1 \oplus G_2 \rightarrow A$ por $\phi(x, y) = \phi_1(x) + \phi_2(y)$. Então

$$\begin{aligned} \phi \circ i(x) &= \begin{cases} \phi(i_1(x), 0), & \text{se } x \in X_1 \\ \phi(0, i_2(x)), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = \begin{cases} \phi_1 \circ i_1(x), & \text{se } x \in X_1 \\ \phi_2 \circ i_2(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} j \circ K_1(x), & \text{se } x \in X_1 \\ j \circ K_2(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = \begin{cases} j(x), & \text{se } x \in X_1 \\ j(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} \\ &= j(x), \text{ se } x \in X_1 \cup X_2. \end{aligned}$$

Suponha que exista $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ tal que $\psi \circ i = j$. Então

$$\begin{aligned} \psi \circ i(x) &= \begin{cases} \psi(i_1(x), 0), & \text{se } x \in X_1 \\ \psi(0, i_2(x)), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = \begin{cases} \psi_1 \circ i_1(x), & \text{se } x \in X_1 \\ \psi_2 \circ i_2(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} j(x), & \text{se } x \in X_1 \\ j(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = \begin{cases} j \circ K_1(x), & \text{se } x \in X_1 \\ j \circ K_2(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Então $\psi_1 \circ i_1 = j \circ K_1$ e portanto $\psi_1 = \phi_1$. Também $\psi_2 \circ i_2 = j \circ K_2$ e portanto $\psi_2 = \phi_2$. Logo $\psi = \phi$ e portanto existe um único homomorfismo ϕ tal que $\phi \circ i = j$. ■

Proposição 12. *Se X é finito, existe (G, i) com a propriedade universal para X .*

Prova: Se $X = \{x\}$ e $i : X \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $i(x) = 1$, pela proposição 7, (\mathbb{Z}, i) tem a propriedade universal para X .

Se $X_1 = \{x\}$ e $i_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $i_1(x) = 1$, pela proposição 7, (\mathbb{Z}, i_1) tem a propriedade universal para X_1 e se $X_2 = \{y\}$ e $i_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $i_2(y) = 1$, pela proposição 7, (\mathbb{Z}, i_2) tem a propriedade universal para X_2 . Seja

$X = \{x, y\} = X_1 \cup X_2$, $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $i : X \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tal que $i(x) = (1, 0)$ e $i(y) = (0, 1)$. Pela proposição 11 $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, i)$ tem a propriedade universal para X .

Por indução, podemos mostrar que se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $G = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n \text{ vezes}} = \mathbb{Z}^n$ e $i : X \rightarrow G$, com $i(x_j) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$ então (\mathbb{Z}^n, i) tem a propriedade universal para X . ■

Seja X um conjunto qualquer e definamos $F(X) = \{\xi : X \rightarrow \mathbb{Z}; \xi(x) = 0, \text{ exceto possivelmente por um número finito de elementos } x \in X\}$. Dados $\xi, \eta \in F(X)$ definamos $-\xi, \xi + \eta$ por $(-\xi)(x) = -\xi(x)$ e $(\xi + \eta)(x) = \xi(x) + \eta(x)$. Então $(F(X), +)$ é um grupo abeliano. Defina $i_X : X \rightarrow F(X)$ por

$$i_X(x)(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Teorema 13. $(F(X), i_X)$ tem a propriedade universal para X .

Prova: Se $Y \subset X$, podemos fazer a identificação $F(Y) \equiv \{\xi \in F(X); \xi(X - Y) = 0\}$ da seguinte forma: dado $\eta \in F(Y)$, defina $\xi : X \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\xi(Y) = \eta(Y)$ e $\xi(X - Y) = 0$ e dado $\xi \in \{\xi \in F(X); \xi(X - Y) = 0\}$, defina $\eta : Y \rightarrow \mathbb{Z}$ por $\eta = \xi|_Y$.

Se $\xi \in F(X)$, existe algum subconjunto Y de X , finito, com $\xi(X - Y) = 0$, então $\xi \in F(Y)$. Assim $F(X) = \bigcup \{F(Y); Y \subset X, Y \text{ finito}\}$.

Se Y é finito, $(F(Y), i_Y)$ tem a propriedade universal para Y , visto que $(F(Y), i_Y)$ pode ser identificado com (\mathbb{Z}^n, i) , onde n é o número de elementos de Y e, pela proposição 12, (\mathbb{Z}^n, i) tem a propriedade universal para Y .

Seja A um grupo abeliano qualquer e $j : X \rightarrow A$, uma função. Vimos que se $Y \subset X$ é finito, então existe um único homomorfismo $\phi_Y : F(Y) \rightarrow A$ tal que $\phi_Y \circ i_Y = j|_Y$.

Se $Z \subset Y$, então $F(Z) \subset F(Y)$, $i_Z = i_Y|_Z$ e $(\phi_Y|_{F(Z)}) \circ i_Z = j|_Z$. De fato, se $Z \subset Y$, observamos que $F(Z) \equiv \{\xi \in F(Y); \xi(Y - Z) = 0\}$. Logo $F(Z) \subset F(Y)$. Para qualquer $x \in Z$, $i_Z(x) \in F(Z)$ pode ser vista, pela identificação acima, como uma função $i_Z(x) : Y \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfazendo $i_Z(x)(Y - Z) = 0$.

Para provarmos que $i_Z = i_Y|_Z$ basta verificarmos que, para qualquer $x \in Z$, $i_Y(x) : Y \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfaz $i_Y(x)(Y - Z) = 0$. Mas, de fato, se $w \in Y - Z$, como $x \in Z, w \neq x$ e portanto $i_Y(x)(w) = 0$ por definição de $i_Y(x)$. Logo $i_Z = i_Y|_Z$. Por outro lado, para qualquer $x \in Z$, $(\phi_Y|_{F(Z)}) \circ i_Z(x) = (\phi_Y|_{F(Z)})(i_Z(x)) = \phi_Y(i_Z(x)) = \phi_Y(i_Y|_Z(x)) = j|_Z(x)$.

Como Z é finito, $(F(Z), i_Z)$ tem a propriedade universal para Z . Assim existe um único homomorfismo $\phi_Z : F(Z) \rightarrow A$; $\phi_Z \circ i_Z = j|_Z$. Portanto $\phi_Z = \phi_Y|_{F(Z)}$.

Definamos, agora $\phi : F(X) \rightarrow A$. Para qualquer $\xi \in F(X)$ escolha $Y \subset X$, finito, com $\xi \in F(Y)$ e defina $\phi(\xi) = \phi_Y(\xi)$. Note que isto não depende de Y , pois se também $\xi \in F(Y')$, temos $\phi_Y(\xi) = \phi_{Y \cup Y'}(\xi) = \phi_{Y'}(\xi)$. Temos que ϕ é um homomorfismo, pois, dados $\xi_1, \xi_2 \in F(X)$, escolha $Y_1, Y_2 \subset X$, finitos, com $\xi_1 \in F(Y_1)$ e $\xi_2 \in F(Y_2)$. Seja $Y = Y_1 \cup Y_2$. Então $\phi(\xi_1 + \xi_2) = \phi_Y(\xi_1 + \xi_2) = \phi_Y(\xi_1) + \phi_Y(\xi_2) = \phi(\xi_1) + \phi(\xi_2)$, pois ϕ_Y é homomorfismo. Para todo $x \in X$, temos $\phi(i_X(x)) = \phi_{\{x\}}(i_{\{x\}}(x)) = j(x)$. Assim $\phi \circ i_X = j$.

Dado qualquer homomorfismo $\psi : F(X) \rightarrow A$, com $\psi \circ i_X = j$, temos para qualquer $Y \subset X$, finito, $\psi|_{F(Y)} \circ i_Y = \psi \circ (i_X|_Y) = j|_Y = \phi_Y \circ i_Y = \phi|_{F(Y)} \circ i_Y$ e portanto $\psi|_{F(Y)} = \phi|_{F(Y)}$. Como $F(X)$ é a união desses subgrupos $F(Y)$, segue que $\psi = \phi$. ■

Abstract: In this work we studied two topics of Algebra: free abelian groups and exact sequences of abelian groups, which are of great utility to solve algebraic topology problems.

Keywords: exact sequences; free abelian groups

Referências Bibliográficas

- [1] Wall, C.T.C.; *A Geometric Introduction to Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1972.
- [2] Kelley, J.L.; *General Topology*. Van Nostrand, Princeton, 1955.

Codimensão de Germes em \mathcal{E}_n

Daiane Alice Henrique¹

Orientador(a): Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli

Resumo: Neste trabalho mostramos como calcular a codimensão de germes de $\mathbb{R}^n, 0$ em \mathbb{R} e provamos que este objeto é \mathcal{R} -invariante.

Palavras-chave: germe de aplicação, ideal jacobiano, codimensão de germe.

1 Germes e k -Jatos

Considere o conjunto de todas as aplicações $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ , onde $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x \in U$. Nesse conjunto introduzimos uma relação de equivalência (\sim), como segue:

Definição 1. Dadas duas aplicações de classe C^∞ $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$, $U_i \subset \mathbb{R}^n$, aberto, $i \in \{1, 2\}$,

$$f_1 \sim f_2$$

se existir uma vizinhança W_x de x em U tal que as restrições $f_1|_{W_x}$ e $f_2|_{W_x}$ coincidam, isto é, $f_1(z) = f_2(z), \forall z \in W_x$.

As classes de equivalência sobre essa relação são chamadas *germes* de aplicações em x e um elemento da classe de equivalência é chamado *representante do germe em x* .

Notação: $f : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$, $f(x) = y$ (chamamos U de fonte e \mathbb{R}^p de meta).

Para cada germe de aplicação $f : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ associamos a *derivada* $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ que é definida como sendo a derivada em x de qualquer representante. Um germe é *invertível* (note que é um difeomorfismo local) se, e somente se, sua derivada é invertível. O *posto* de um germe é definido como o *posto* de sua derivada em x . Quando o *posto* é igual a dimensão de U o germe

¹FAPESP

é *imersível* e quando o *posto* é igual a dimensão de \mathbb{R}^p o germe é *submersível*. Logo, um germe é invertível se, e somente se, é imersível e submersível. Quando o germe não é imersível e nem submersível em x dizemos que x é *ponto singular*.

Denotamos por $\mathcal{E}_{n,p}$ o conjunto dos germes de aplicações $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ . Quando $p = 1$ este conjunto é denotado por \mathcal{E}_n .

Definição 2. O **espaço dos jatos** $J^k(n, p)$ é o espaço vetorial real de todas as aplicações $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ onde cada coordenada g_i de g é um polinômio de grau menor ou igual a k nas coordenadas canônicas x_1, \dots, x_n em \mathbb{R}^n com termo constante zero. Os elementos de $J^k(n, p)$ são chamados **k-jatos**.

Para cada germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$ e cada $a \in \mathbb{R}^n$, é definida a aplicação $j^k f$;

$$\begin{aligned} j^k f : \mathbb{R}^n &\rightarrow J^k(n, p) \\ a &\mapsto j^k f(a) \end{aligned}$$

onde $j^k f(a)$ é o desenvolvimento até a ordem k (inclusive) da série de Taylor de $f(x) - f(a)$ em uma vizinhança da origem (note que tal série está bem definida pois f é de classe C^∞).

Esta aplicação de classe C^∞ é chamada **k-jato de f em a** .

Ao conjunto $\mathcal{E}_{n,p}$ definimos uma topologia através de um sistema fundamental de vizinhanças.

Definição 3. Seja $f \in \mathcal{E}_{n,p}$. Dados $\epsilon > 0$, $R > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ associamos a f uma **vizinhança fundamental** em $\mathcal{E}_{n,p}$ composta de todos os germes de aplicações $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ com } \|x\| \leq R, \|j^k f(x) - j^k g(x)\| < \epsilon,$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma fixada no espaço dos jatos $J^k(n, p)$.

2 A Álgebra Real \mathcal{E}_n

Definição 4. Por **Álgebra Real** entendemos um par (V, \cdot) , onde V é um espaço vetorial real e (\cdot) é uma aplicação bilinear de $V \times V$ em V , chamada **Produto de Álgebra**.

Neste contexto, estamos interessados em estudar duas álgebras real, a saber \mathcal{E}_n e $\hat{\mathcal{E}}_n$.

O conjunto \mathcal{E}_n dos germes $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, f(0))$ (de aplicações de classe C^∞) tem a estrutura de espaço vetorial, munido da adição e multiplicação por escalar usuais para aplicações. Ainda, a aplicação bilinear:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n &\rightarrow \mathcal{E}_n \\ (f, g) &\mapsto f \cdot g, \text{ com } (f \cdot g)(x) := f(x)g(x) \end{aligned}$$

dá a \mathcal{E}_n a estrutura de álgebra real (a bilinearidade de (\cdot) segue das propriedades do corpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).

Definimos o conjunto $\hat{\mathcal{E}}_n$ como a coleção de todas as séries de potências formal $\hat{f} = \sum f_\alpha x^\alpha$ nas indeterminadas reais x_1, \dots, x_n ainda escrevemos x^α , com $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, para denotar a expressão $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, isto é, $\hat{\mathcal{E}}_n = \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$. Note que $\hat{\mathcal{E}}_n$ munido com as operações adição e multiplicação usuais das séries de potências formal tem uma estrutura de espaço vetorial real. Além disso, $\hat{\mathcal{E}}_n$ é uma álgebra real, onde a álgebra produto é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \cdot : \hat{\mathcal{E}}_n \times \hat{\mathcal{E}}_n &\rightarrow \hat{\mathcal{E}}_n \\ (\hat{f}, \hat{g}) &\mapsto \hat{f} \cdot \hat{g} := \hat{h} \end{aligned}$$

onde, considerando $\hat{f} = \sum f_\alpha x^\alpha$ e $\hat{g} = \sum g_\beta x^\beta$, temos $\hat{h} = \sum h_\gamma x^\gamma$ com

$$h_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} f_\alpha g_\beta.$$

Definição 5. Dadas duas álgebras real V e W , um **homomorfismo de álgebras** $\varphi : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear tal que $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, para quaisquer $x, y \in V$.

Exemplo 6. A aplicação a seguir é um homomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{E}_n &\rightarrow \hat{\mathcal{E}}_n \\ f &\mapsto \hat{f}\end{aligned}$$

onde \hat{f} é a série de Taylor de f , a qual é convergente, uma vez que f é um germe de aplicação C^∞ .

Este fato segue das propriedades intrínsecas de uma série.

Note que $(\mathcal{E}_n, +, \cdot)$, onde $(+)$ e (\cdot) foram definidas acima, tem estrutura de um anel comutativo com unidade (neste caso, o elemento unidade é o germe da aplicação f_0 de $(\mathbb{R}^n, 0)$ em \mathbb{R} definida por $f_0(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ e tais propriedades são herdadas do corpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).

O resultado a seguir, descreve os elementos invertíveis em \mathcal{E}_n .

Teorema 7. *Uma condição necessária e suficiente para que um germe $f \in \mathcal{E}_n$ seja invertível é que $f(0) \neq 0$.*

Prova: Suponha f invertível, então existe um germe $g \in \mathcal{E}_n$ tal que

$$(f \cdot g)(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

logo, em particular para $x = 0$, temos $f(0) \cdot g(0) = 1$, isto implica que $f(0) \neq 0$.

Suponha $f \in \mathcal{E}_n$ satisfazendo $f(0) \neq 0$, então $g = \frac{1}{f}$ é o inverso de f . ■

Definição 8. Dizemos que dois germes de aplicação C^∞ $f : (U, x_1) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : (V, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ são \mathcal{R} -equivalentes se, e somente se, existe um germe invertível $h : (V, x_2) \rightarrow (U, x_1)$ tal que $f \circ h = g$.

Definição 9. Denotamos por \mathfrak{m}_n o subconjunto dos germes $f \in \mathcal{E}_n$ tal que $f(0) = 0$, isto é,

$$\mathfrak{m}_n = \{f \in \mathcal{E}_n / f(0) = 0\}.$$

Proposição 10. \mathfrak{m}_n é o único ideal maximal de \mathcal{E}_n .

Prova: (i) Sejam $f, g \in \mathfrak{m}_n$, quaisquer, então $f - g \in \mathfrak{m}_n$, pois $f(0) = 0$ e $g(0) = 0$ temos então $(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 0 - 0 = 0$.

(ii) Sejam $f \in \mathfrak{m}_n$, $g \in \mathcal{E}_n$, quaisquer, então $f \cdot g \in \mathfrak{m}_n$, pois $(f \cdot g)(0) = f(0) \cdot g(0) = 0 \cdot g(0) = 0$.

Portanto, por (i) e (ii) segue que \mathfrak{m}_n é um ideal.

Suponha $I \subseteq \mathcal{E}_n$ um ideal com $\mathfrak{m}_n \subset I$ e $\mathfrak{m}_n \neq I$, então existe $f \in I$ tal que $f(0) \neq 0$. Assim, pelo teorema 7 f é invertível e então $f_0 \in I$ e como I é ideal de \mathcal{E}_n , para qualquer $h \in \mathcal{E}_n$, $h \cdot f_0 \in I$ portanto, $I = \mathcal{E}_n$. Segue que \mathfrak{m}_n é ideal maximal e pelo mesmo motivo é único. ■

Proposição 11 (Lema de Hadamard). *Sejam U uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^n conexa e $f : U \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , tal que $f(0, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^q$. Então existem funções f_1, \dots, f_n definidas em $U \times \mathbb{R}^q$ tais que $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ onde x_1, \dots, x_n são as coordenadas de \mathbb{R}^n .*

Prova:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{df}{dt}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt &= \\ f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) - f(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_q) &= \\ f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) - 0 &= f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q). \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{df}{dt}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt &= \\ \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt &= \\ \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q),$$

onde para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ temos

$$f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt.$$

Ou seja, existem funções f_1, \dots, f_n definidas em $U \times \mathbb{R}^q$ tais que $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ onde x_1, \dots, x_n são as coordenadas de \mathbb{R}^n . ■

Corolário 12. *O ideal maximal de \mathcal{E}_n , \mathfrak{m}_n , é tal que $\mathfrak{m}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.*

Prova: (i) $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \mathfrak{m}_n$:

Seja $g \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, então $g = \sum_{i=1}^n x_i g_i$, $g_i \in \mathcal{E}_n$. Logo,

$$g(0) = \sum_{i=1}^n 0 g_i(0) = 0.$$

Portanto como, $g \in \mathcal{E}_n$ e $g(0) = 0$ temos que $g \in \mathfrak{m}_n$.

(ii) $\mathfrak{m}_n \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle$:

Seja $f \in \mathfrak{m}_n$, então $f(0) = 0$, logo pelo Lema de Hadamard, existem $f_i \in \mathcal{E}_n$ tais que:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x) \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

■

Proposição 13. *Seja $F_k = \{f \in \mathcal{E}_n / j^{k-1} f(x) = 0\}$. Então $F_k = \mathfrak{m}_n^k$, isto é, é gerado pelos monômios de grau k em x_1, \dots, x_n .*

Prova: Se $k = 1$:

$$\mathfrak{m}_n^1 = \mathfrak{m}_n \text{ e } F_1 = \{f \in \mathcal{E}_n / j^0 f(x) = 0\} = \{f \in \mathcal{E}_n / f(0) = 0\} = \mathfrak{m}_n.$$

Portanto, $F_1 = \mathfrak{m}_n^1$. Mas, pelo corolário anterior, $F_1 = \mathfrak{m}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, ou seja, F_1 é o ideal gerado pelos monômios de grau 1.

Queremos mostrar que $F_k = \mathfrak{m}_n^k$, ou seja,

$$(i) F_k \subset \mathfrak{m}_n^k \text{ e } (ii) \mathfrak{m}_n^k \subset F_k.$$

Note que $\mathfrak{m}_n^k \subset F_k$. De fato, como \mathfrak{m}_n^k é gerado pelos monômios de grau k nas variáveis x_1, \dots, x_n segue que, se $f \in \mathfrak{m}_n^k$ então $j^{k-1}f(x+0) = 0$, ou seja, $f \in F_k$.

A outra inclusão faremos usando o Princípio da Indução Finita. Para tanto:

Suponha que, $F_{k-1} \subset \mathfrak{m}_n^{k-1}$, deste fato queremos concluir que $F_k \subset \mathfrak{m}_n^k$.

Seja $f \in F_k$, logo $j^{k-1}f(x) = 0$, conseqüentemente, $f(0) = 0$, assim pelo Lema de Hadamard:

$$f = \sum_{i=1}^n x_i f_i,$$

onde

$$f_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

Mas,

$$f_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt \in F_{k-1}$$

pois, $j^{k-2}f_i(x) = 0$.

Como, por hipótese de indução, $F_{k-1} \subset \mathfrak{m}_n^{k-1}$, segue que $f_i \in \mathfrak{m}_n^{k-1}$, assim:

$$f = \sum_{i=1}^n x_i f_i \in \mathfrak{m}_n \mathfrak{m}_n^{k-1} = \mathfrak{m}_n^k.$$

■

Observe que em particular, mostramos que F_k é um ideal e ainda mais, é um ideal finitamente gerado.

Lema 14 (Lema de Borel). *O homomorfismo de álgebra $\varphi : \mathcal{E}_n \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_n$ é sobrejetor.*

Prova: [1, p. 228].

■

Note $\widehat{fg} = \widehat{f}\widehat{g}$. De fato, para mostrar que $\widehat{fg} = \widehat{f}\widehat{g}$, é suficiente mostrar que $\widehat{fg} = \widehat{f}\widehat{g}$ módulo \mathfrak{m}_n^{k+1} , $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Seja $k_0 \in \mathbb{Z}_+$. Denotamos f módulo $\mathfrak{m}_n^{k_0+1}$ por f_{k_0} e analogamente, g módulo $\mathfrak{m}_n^{k_0+1}$ por g_{k_0} . Observe que da proposição 13 segue que f_{k_0} e g_{k_0} são

ambos polinômios de grau k_0 , sendo assim as respectivas derivadas, superiores a k_0 , são todas nulas. Consequentemente,

$$\widehat{fg} \equiv_{\text{mod } \mathfrak{m}_n^{k_0+1}} \widehat{f_{k_0}g_{k_0}} = f_{k_0}g_{k_0} = \widehat{f\hat{g}}.$$

Observação 15. Ainda desta demonstração seguem as seguintes propriedades:

- (1) $\ker \varphi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n^k$
- (2) $\mathfrak{m}_n^{\infty} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n^k$
- (3) $\frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n^{\infty}} \cong \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]] = \hat{\mathcal{E}}_n$

Observamos ainda que de (3) segue que o quociente $\frac{\hat{\mathcal{E}}_n}{\hat{\mathfrak{m}}_n^k}$ tem dimensão finita, já que este é gerado pelos monômios de grau menor do que k nas n -variáveis. Ainda, uma vez que, $\frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n^k} \cong \frac{\hat{\mathcal{E}}_n}{\hat{\mathfrak{m}}_n^k}$, segue também que $\frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n^k}$ tem dimensão finita.

Lema 16 (Lema de Nakayama). *Seja R um anel comutativo com identidade 1. Seja \mathfrak{m} um ideal de R tal que $1 + x$ é invertível em R , $\forall x \in \mathfrak{m}$. Sejam M um R -módulo, A e B submódulos com A finitamente gerado. Se $A \subseteq B + \mathfrak{m}A$ então $A \subseteq B$.*

Prova: Como A é finitamente gerado, sejam $a_1, \dots, a_t \in A$, tais que $A = \langle a_1, \dots, a_t \rangle$. Como, por hipótese, $A \subseteq B + \mathfrak{m}A$ segue que:

$$a_i = b_i + \lambda_{i1}a_1 + \dots + \lambda_{it}a_t,$$

onde $\lambda_{ij} \in \mathfrak{m}$, $j = 1, \dots, t$.

De outra forma,

$$b_i = a_i - \lambda_{i1}a_1 - \dots - \lambda_{it}a_t =$$

$$(1 - \lambda_{ii})a_i - \lambda_{i1}a_1 - \dots - \lambda_{i(i-1)}a_{i-1} - \lambda_{i(i+1)}a_{i+1} - \dots - \lambda_{it}a_t. \quad (\text{I})$$

Então colocando (I) na forma matricial, temos que,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_{11} & \dots & -\lambda_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{t1} & \dots & 1 - \lambda_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_t \end{pmatrix}.$$

Seja $\Lambda = (\lambda_{ij})$, então:

$$(I - \Lambda) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix}.$$

Será suficiente mostrar que $(I - \Lambda)$ é invertível, pois assim temos que: $a = (I - \Lambda)^{-1} \cdot b$, ou seja, cada a_i é combinação linear de elementos de B e consequentemente, cada $a_i \in B$.

Mostremos que $\det(I - \Lambda)$ é invertível em \mathbb{R} . Observe que:

$$\det(I - \Lambda) = 1 - (\text{soma de produto de elementos de } \mathfrak{m}) = 1 - \lambda = 1 + (-\lambda),$$

onde $\lambda \in \mathfrak{m}$ e $(-\lambda) \in \mathfrak{m}$. Mas, por hipótese, $1 + (-\lambda)$ é invertível em \mathbb{R} , isto é, $\det(I - \Lambda)$ é invertível em \mathbb{R} . ■

Observação 17. Uma vez que $F_k = \mathfrak{m}_n^k$, segue em particular que, o submódulo de \mathcal{E}_n , F_k é finitamente gerado, para todo k . Porém este fato nem sempre ocorre, isto é, nem todo submódulo de \mathcal{E}_n é finitamente gerado, o que faz de \mathcal{E}_n um anel não Noetheriano. A seguir mostraremos que, o submódulo de \mathcal{E}_n , $\mathfrak{m}_n^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n^k$, não é finitamente gerado.

De fato, suponha por absurdo que $\mathfrak{m}_n^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n^k$ é finitamente gerado.

Já temos que \mathcal{E}_n é anel comutativo com unidade 1 ($1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $1(x) = 1$), e que \mathfrak{m}_n é um ideal em \mathcal{E}_n tal que $1 + f$ é invertível, para todo $f \in \mathfrak{m}_n$ (pois $(1 + f)(0) = 1(0) + f(0) = 1 + 0 = 1 \neq 0$), logo, considerando $A = \mathfrak{m}_n^\infty$ e $B = \{0\}$, como $\mathfrak{m}_n^k \subseteq \mathfrak{m}_n, \forall k \geq 1$ temos que $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n^k \subseteq \mathfrak{m}_n$, consequentemente, $A \subseteq B + \mathfrak{m}_n A$.

Sob estas condições pelo Lema de Nakayama, segue que, $A \subseteq B$, isto é, $\mathfrak{m}_n^\infty \subseteq \{0\}$. Consequentemente, $\mathfrak{m}_n^\infty = \{0\}$, o que é absurdo.

Seja M um \mathcal{E}_n -módulo e seja $I \subset M$ um \mathcal{E}_n -submódulo, note que, em particular, I pode ser visto como um subespaço do espaço vetorial real \mathcal{E}_n .

Definição 18. A **codimensão** de I , denotada por $\text{cod } I$ é a dimensão de $\frac{M}{I}$. Dizemos que I tem **codimensão finita** em M se o espaço quociente $\frac{M}{I}$ tem dimensão finita, isto é, número de geradores finito.

Proposição 19. *Sejam M um \mathcal{E}_n -módulo livre finitamente gerado (ou $\hat{\mathcal{E}}_n$ -módulo) e $I \subset M$ um submódulo. Então I tem codimensão finita em M se, e somente se, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}_n^k \cdot M \subseteq I$ (ou $\hat{\mathfrak{m}}_n^k \cdot M \subset I$).*

Prova: (\Rightarrow) Considere a seguinte sequência:

$$I + M \supseteq I + \mathfrak{m}_n \cdot M \supseteq I + \mathfrak{m}_n^2 \cdot M \supseteq I + \mathfrak{m}_n^3 \cdot M \supseteq \cdots \supseteq I + \mathfrak{m}_n^k \cdot M \supseteq \cdots \supseteq I.$$

Consequentemente,

$$\frac{M}{I+M} \subseteq \frac{M}{I+\mathfrak{m}_n \cdot M} \subseteq \frac{M}{I+\mathfrak{m}_n^2 \cdot M} \subseteq \cdots \subseteq \frac{M}{I+\mathfrak{m}_n^k \cdot M} \subseteq \cdots \subseteq \frac{M}{I}. \quad (*)$$

Tomando as dimensões,

$$\dim \left(\frac{M}{I+M} \right) \leq \cdots \leq \dim \left(\frac{M}{I+\mathfrak{m}_n^k \cdot M} \right) \leq \cdots \leq \dim \frac{M}{I}.$$

Cada inclusão estrita na sequência (*) tem uma contribuição ≥ 1 na codimensão de I . Como a codimensão de I é finita, existe $k \geq 1$ tal que $I + \mathfrak{m}_n^k \cdot M = I + \mathfrak{m}_n^{k+1} \cdot M$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_n^k \cdot M \subset I + \mathfrak{m}_n^k \cdot M = I + \mathfrak{m}_n^{k+1} \cdot M = I + \mathfrak{m}_n \cdot \mathfrak{m}_n^k \cdot M \implies \\ \mathfrak{m}_n^k \cdot M \subset I + \mathfrak{m}_n \cdot \mathfrak{m}_n^k \cdot M. \end{aligned}$$

Portanto, nestas condições, pelo lema de Nakayama segue $\mathfrak{m}_n^k \cdot M \subseteq I$, para algum inteiro k .

(\Leftarrow) Por hipótese, existe k tal que $\mathfrak{m}_n^k \cdot M \subseteq I$, consequentemente,

$$\frac{M}{I} \subseteq \frac{M}{\mathfrak{m}_n^k \cdot M},$$

logo, $\dim \frac{M}{I} \leq \dim \frac{M}{\mathfrak{m}_n^k \cdot M}$. Mas M é um \mathcal{E}_n -módulo livre finitamente gerado, ou seja,

$$M \cong \underbrace{\mathcal{E}_n \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n}_{s\text{-parcelas}}$$

desta forma,

$$\frac{M}{\mathfrak{m}_n^k \cdot M} \cong \frac{\mathcal{E}_n \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n^k (\mathcal{E}_n \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n)} \cong \frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n^k} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n^k},$$

o que acarreta, $\dim \frac{M}{\mathfrak{m}_n^k \cdot M} = \dim \frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n^k} + \cdots + \dim \frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n^k}$. Mas como já observado, $\dim \frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n^k} < \infty$. Portanto, $\dim \frac{M}{I} \leq \dim \frac{M}{\mathfrak{m}_n^k \cdot M} = s \dim \frac{\mathcal{E}_n}{\mathfrak{m}_n^k} < \infty$, ou seja, $\text{cod } I < \infty$. ■

Observação 20. Da demonstração anterior podemos também concluir que $\text{cod } I$ é finita se $\mathfrak{m}_n^k M \subseteq I + \mathfrak{m}_n^{k+1} M$.

Definição 21. Seja $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. A k -ésima **codimensão** de I é definida por

$$\text{cod}_k I := \begin{cases} \dim \frac{I + M}{I + \mathfrak{m}_n \cdot M}, & \text{se } k = 0 \\ \dim \frac{I + \mathfrak{m}_n^k \cdot M}{I + \mathfrak{m}_n^{k+1} \cdot M}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

Proposição 22. *Sobre as hipóteses da proposição 19 uma condição necessária e suficiente para $I \subseteq M$ ter codimensão finita em M é que, exceto para um número finito, $\text{cod}_k I$ seja igual a zero, e neste caso*

$$\text{cod } I = \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \dots$$

Prova: (\Rightarrow) Supondo que I tem codimensão finita em M então pela proposição 19 existe $k \geq 1$ com $\mathfrak{m}_n^k M \subseteq I$. Logo, $I + \mathfrak{m}_n^k \cdot M = I + \mathfrak{m}_n^{k+s} \cdot M$, $s \in \mathbb{Z}_+$.

Consequentemente,

$$\text{cod}_{k+l} I = \dim \frac{I + \mathfrak{m}_n^{k+l} \cdot M}{I + \mathfrak{m}_n^{(k+l)+1} \cdot M} = \dim \frac{I + \mathfrak{m}_n^k \cdot M}{I + \mathfrak{m}_n^k \cdot M} = 0,$$

para todo $j \geq k$, digamos $j = k + s$, segue que $\text{cod}_j I = 0$. Considerando que as inclusões estritas na sequência (*) tem uma contribuição ≥ 1 na codimensão de I e $\text{cod}_j I = 0$, $j = k + s$ segue que

$$\text{cod } I = \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \dots$$

(\Leftarrow) Se $\text{cod}_k I = 0$ temos $\dim \frac{I + \mathfrak{m}_n^k \cdot M}{I + \mathfrak{m}_n^{k+1} \cdot M} = 0$, então $I + \mathfrak{m}_n^k \cdot M = I + \mathfrak{m}_n^{k+1} \cdot M$.

Seja $k = \min\{j \in \mathbb{Z}_+; \text{cod}_l I = 0, \forall l \geq j\}$. Como $\mathfrak{m}_n^k \cdot M \subseteq I + \mathfrak{m}_n^k \cdot M = I + \mathfrak{m}_n^{k+1} \cdot M$, ou seja, $\mathfrak{m}_n^k \cdot M \subseteq I + \mathfrak{m}_n \mathfrak{m}_n^k \cdot M$.

Sob esta hipótese, pelo Lema de Nakayama, segue que $\mathfrak{m}_n^k \cdot M \subseteq I$ e pela proposição 19, isto implica que I tem codimensão finita em M . \blacksquare

Definição 23. Seja $f \in \mathcal{E}_n$, logo $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{E}_n$, o **ideal jacobiano** é definido por:

$$J_f := \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathcal{E}_n}$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Logo, se $g \in J_f$ então $g = \sum_i \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Definição 24. $\text{cod } f = \text{cod } J_f = \dim \frac{\mathcal{E}_n}{J_f}$.

Proposição 25. *Suponha que o germe $f \in \mathcal{E}_n$ tenha codimensão finita diferente de zero. Então a origem em \mathbb{R}^n é um ponto singular isolado de qualquer representante de f , isto é, existe uma vizinhança da origem na qual a origem é o único ponto singular do representante.*

Prova: Observe que se $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) \neq 0$ então a função derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ é um elemento invertível em \mathcal{E}_n , conseqüentemente o ideal jacobiano, isto é, $J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$ é tal que $J_f = \mathcal{E}_n$ e isto implicaria f ter codimensão zero, o que não ocorre por hipótese.

Por outro lado, como f tem codimensão finita não nula, existe $k \geq 1$ tal que

$$\langle x_1^k, \dots, x_n^k, \dots \rangle = \mathfrak{m}_n^k \subset J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathcal{E}_n}. \quad (\text{I})$$

Em particular de (I), segue que x_1^k, \dots, x_n^k são combinações lineares de $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, isto é, $x_j^k = \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, g_j \in \mathcal{E}_n$.

No ponto singular de f todas as derivadas se anulam, então necessariamente x_1^k, \dots, x_n^k também se anulam, conseqüentemente o ponto singular é apenas a n -upla $0 = (0, \dots, 0)$. Este comportamento ocorre em uma vizinhança da origem. Portanto, a origem é o único ponto singular de f . ■

A contrapositiva da proposição 25 é muito útil para descobrir quando um germe tem codimensão infinita, já que para isso basta constatar que a origem não é uma singularidade isolada.

A seguir um exemplo dessa aplicação.

Exemplo 26. Considere o germe $f(x, y, z) = y^2 - z^2x^2 + x^3$. As suas derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -z^2x + 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2zx^2,$$

com todas se anulando simultaneamente no eixo z . Assim a origem em \mathbb{R}^3 não é um ponto singular isolado de f , e a proposição 25 nos diz que f deve ter codimensão infinita.

Observe que a afirmação recíproca da proposição 25 não é verdadeira, ou seja, mesmo a origem sendo um ponto singular isolado, pode acontecer do germe em questão ter codimensão infinita. No entanto, no caso complexo a afirmação recíproca é válida. Assim, uma maneira de decidir se a codimensão de um germe é finita ou infinita (real) é suficiente decidir no caso complexo.

Exemplo 27. Seja o germe $f(x) = x^{s+1}$ com s um inteiro maior ou igual a 1, temos $J_f = \langle x^s \rangle$ então,

$$\begin{aligned} \text{cod}_0 f &= \dim \frac{\mathcal{E}_1}{\mathfrak{m}_1} = \dim \frac{\mathbb{R}[[x]]}{\langle x \rangle} = \dim \mathbb{R}\{1\} = 1 \\ \text{cod}_1 f &= \dim \frac{\langle x^s \rangle + \langle x \rangle}{\langle x^s \rangle + \langle x^2 \rangle} = \dim \mathbb{R}\{x\} = 1 \\ \text{cod}_2 f &= \dim \frac{\langle x^s \rangle + \langle x^2 \rangle}{\langle x^s \rangle + \langle x^3 \rangle} = \dim \mathbb{R}\{x^2\} = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{cod}_{s-1} f &= \dim \frac{\langle x^s \rangle + \langle x^{s-1} \rangle}{\langle x^s \rangle + \langle x^s \rangle} = \dim \mathbb{R}\{x^{s-1}\} = 1 \\ \text{cod}_s f &= \dim \frac{\langle x^s \rangle + \langle x^s \rangle}{\langle x^s \rangle + \langle x^s \rangle} = 0 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Portanto, $\text{cod} f = \text{cod}_0 f + \text{cod}_1 f + \dots + \text{cod}_{s-1} f = s$.

Exemplo 28. Podemos calcular a codimensão do germe $f(x, y) = x^2y + y^4$, temos $J_f = \langle xy, x^2 + 4y^3 \rangle$, então:

$$\begin{aligned}\text{cod}_0 f &= \dim \frac{\mathcal{E}_2}{\mathfrak{m}_2} = 1 \\ \text{cod}_1 f &= \dim \frac{J_f + \mathfrak{m}_2^1}{J_f + \mathfrak{m}_2^2} = \dim \frac{\langle xy, x^2 + 4y^3 \rangle + \langle x, y \rangle}{\langle xy, x^2 + 4y^3 \rangle + \langle x^2, xy, y^2 \rangle} = \dim \mathbb{R}\{x, y\} = 2 \\ \text{cod}_2 f &= \dim \frac{J_f + \mathfrak{m}_2^2}{J_f + \mathfrak{m}_2^3} = \dim \frac{\langle xy, x^2 + 4y^3 \rangle + \langle x^2, xy, y^2 \rangle}{\langle xy, x^2 + 4y^3 \rangle + \langle x^3, xy^2, x^2y, y^3 \rangle} \\ &= \dim \mathbb{R}\{y^2\} = 1 \\ \text{cod}_3 f &= \dim \frac{J_f + \mathfrak{m}_2^3}{J_f + \mathfrak{m}_2^4} = \dim \frac{\langle xy, x^2 + 4y^3 \rangle + \langle x^3, xy^2, x^2y, y^3 \rangle}{\langle xy, x^2 + 4y^3 \rangle + \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 \rangle} \\ &= \dim \mathbb{R}\{y^3\} = 1 \\ \text{cod}_4 f &= \dim \frac{J_f + \mathfrak{m}_2^4}{J_f + \mathfrak{m}_2^5} \\ &= \dim \frac{\langle xy, x^2 + 4y^3 \rangle + \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 \rangle}{\langle xy, x^2 + 4y^3 \rangle + \langle x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 \rangle} = 0 \\ \text{cod}_k f &= 0, \forall k \geq 4\end{aligned}$$

Portanto, pelo corolário anterior, $\text{cod}_k f = \text{cod}_0 f + \text{cod}_1 f + \dots = 5$.

Exemplo 29. A codimensão do germe $g(x, y) = x^3 + xy^3$ é 7. De fato, temos $J_g = \langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle$, assim,

$$\begin{aligned}\text{cod}_0 g &= 1 \\ \text{cod}_1 g &= \dim \frac{J_g + \mathfrak{m}_2^1}{J_g + \mathfrak{m}_2^2} = \dim \frac{\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle + \langle x, y \rangle}{\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle + \langle x^2, xy, y^2 \rangle} \\ &= \dim \mathbb{R}\{x, y\} = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cod}_2 f &= \dim \frac{J_f + \mathfrak{m}_2^2}{J_f + \mathfrak{m}_2^3} = \dim \frac{\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle + \langle x^2, xy, y^2 \rangle}{\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle + \langle x^3, xy^2, x^2y, y^3 \rangle} \\ &= \dim \mathbb{R}\{xy, y^2\} = 2 \\ \text{cod}_3 f &= \dim \frac{J_f + \mathfrak{m}_2^3}{J_f + \mathfrak{m}_2^4} = \dim \frac{\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle + \langle x^3, xy^2, x^2y, y^3 \rangle}{\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle + \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 \rangle} \\ &= \dim \mathbb{R}\{y^3\} = 1 \\ \text{cod}_4 f &= \dim \frac{J_f + \mathfrak{m}_2^4}{J_f + \mathfrak{m}_2^5} \\ &= \dim \frac{\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle + \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 \rangle}{\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle + \langle x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 \rangle} = \dim \mathbb{R}\{y^4\} = 1 \\ \text{cod}_5 f &= \dim \frac{J_f + \mathfrak{m}_2^5}{J_f + \mathfrak{m}_2^6} \\ &= \dim \frac{\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle + \langle x^5, xy^4, x^2y^3, x^3y^2, x^4y, y^5 \rangle}{\langle 3x^2 + y^3, xy^2 \rangle + \langle x^6, xy^5, x^2y^4, x^3y^3, x^4y^2, x^5y, y^6 \rangle} = 0 \\ \text{cod}_k f &= 0, \forall k \geq 5 \end{aligned}$$

Portanto, $\text{cod}_k f = \text{cod}_0 f + \text{cod}_1 f + \dots = 7$.

Dado um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ obtemos uma aplicação $f^* : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_n$ pela fórmula $\lambda \mapsto \lambda \circ f$.

Veja que f^* é um homomorfismo de álgebra, de fato:

- Aplicação linear:

$$f^*(\lambda + a\beta) = (\lambda + a\beta) \circ f = (\lambda + a\beta)(f) = \lambda \circ f + a(\beta \circ f) = f^*(\lambda) + a f^*(\beta)$$

- $f^*(\lambda \cdot \beta) = f^*(\lambda) \cdot f^*(\beta)$, pois para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$((\lambda \cdot \beta) \circ f)(x) = (\lambda \cdot \beta)(f(x)) = \lambda(f(x)) \cdot \beta(f(x)) = ((\lambda \circ f) \cdot (\beta \circ f))(x),$$

ou seja, $(\lambda \cdot \beta) \circ f = (\lambda \circ f) \cdot (\beta \circ f)$, portanto $f^*(\lambda \cdot \beta) = f^*(\lambda) \cdot f^*(\beta)$.

Este homomorfismo f^* é chamado *homomorfismo induzido por f* .

Proposição 30. *Homomorfismos induzidos por germes tem as seguintes propriedades:*

(i) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, onde $g \in \mathcal{E}_{p,n}$ e $f \in \mathcal{E}_{n,p}$, quaisquer;

(ii) $id_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é um germe da aplicação identidade, então $(id_{\mathbb{R}^n})^* = Id_{\mathcal{E}_n}$;

(iii) Se $h \in \mathcal{E}_n$ é invertível então h^* é um isomorfismo e ainda, $(h^{-1})^* = (h^*)^{-1}$.

Prova: (i) Temos $(f \circ g)^*(\lambda) = \lambda \circ (f \circ g) = (\lambda \circ f) \circ g = g^*(\lambda \circ f) = g^*(f^*(\lambda)) = (g^* \circ f^*)(\lambda)$, para todo $\lambda \in \mathcal{E}_n$. Portanto, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

(ii) Note que $(id_{\mathbb{R}^n})^*(\lambda) = \lambda \circ id$, mas $(\lambda \circ id)(x) = \lambda(id(x)) = \lambda(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, $(id_{\mathbb{R}^n})^*(\lambda) = \lambda = Id_{\mathcal{E}_n}(\lambda)$, qualquer que seja $\lambda \in \mathcal{E}_n$, ou seja, $(id_{\mathbb{R}^n})^* = Id_{\mathcal{E}_n}$.

(iii) $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível, então existe $h^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $(h \circ h^{-1}) = id_{\mathbb{R}^n} = (h^{-1} \circ h)$.

Pelos itens (i) e (ii):

$$Id_{\mathcal{E}_n} = (id_{\mathbb{R}^n})^* = (h \circ h^{-1})^* = (h^{-1})^* \circ h^*,$$

$$Id_{\mathcal{E}_n} = (id_{\mathbb{R}^n})^* = (h^{-1} \circ h)^* = h^* \circ (h^{-1})^*,$$

ou seja,

$$(h^{-1})^* \circ h^* = Id_{\mathcal{E}_n} \tag{I}$$

$$h^* \circ (h^{-1})^* = Id_{\mathcal{E}_n} \tag{II}$$

De (I) temos que h^* é injetora e de (II) h^* é sobrejetora, ou seja, h^* é bijeção e consequentemente h^* é um isomorfismo. Ainda de (I) e (II), segue que $(h^{-1})^* = (h^*)^{-1}$. ■

Proposição 31. Um germe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível se, e só se, $f^* : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ é um isomorfismo.

Prova: (\Rightarrow) Item (iii) da proposição anterior.

(\Leftarrow) f^* é um isomorfismo, logo $f^*(\mathfrak{m}_n) = \mathfrak{m}_n$. De fato, seja $\lambda \in \mathfrak{m}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ então $\lambda = \sum_{i=1}^n g_i x_i$, com $g_i \in \mathcal{E}_n$. Logo,

$$f^*(\lambda) = f^*(\sum_{i=1}^n g_i x_i) = \sum_{i=1}^n f^*(g_i) f^*(x_i) = \sum_{i=1}^n h_i x_i,$$

onde $h_i = f^*(g_i) \in \mathcal{E}_n$. Portanto, se $\lambda \in \mathfrak{m}_n$ então $f^*(\lambda) \in \mathfrak{m}_n$, ou seja,

$$f^*(\mathfrak{m}_n) \subseteq \mathfrak{m}_n. \quad (i)$$

Por outro lado, seja $\lambda \in \mathfrak{m}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ então $\lambda = \sum_{i=1}^n g_i x_i$, com $g_i \in \mathcal{E}_n$. Mas f^* é isomorfismo, logo existe $h_i \in \mathcal{E}_n$ tal que $f^*(h_i) = g_i$, assim

$$\lambda = \sum_{i=1}^n f^*(h_i) x_i = f^*\left(\sum_{i=1}^n h_i x_i\right) \in f^*(\mathfrak{m}_n).$$

Consequentemente,

$$\mathfrak{m}_n \subseteq f^*(\mathfrak{m}_n). \quad (ii)$$

Portanto, por (i) e (ii), $\mathfrak{m}_n = f^*(\mathfrak{m}_n)$. Identificando x_i com a projeção, temos

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{E}_n &\rightarrow \mathcal{E}_n \\ x_i &\mapsto f^*(x_i) = x_i \circ f \end{aligned}$$

onde, $(x_i \circ f)(x) = x_i(f(x)) = x_i(f_1(x), \dots, f_n(x)) = f_i(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Portanto,

$$f^*(x_i) = f_i. \quad (I)$$

Como $x_i \in \mathfrak{m}_n = f^*(\mathfrak{m}_n)$ segue que $x_i = f^*(h)$, para algum $h \in \mathfrak{m}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, logo, $x_i = f^*(\xi_{i,1}x_1 + \dots + \xi_{i,n}x_n)$, onde $\xi_{i,j} \in \mathcal{E}_n$. Mas f^* é um homomorfismo de álgebras, assim $x_i = \sum_{j=1}^n f^*(\xi_{i,j})f^*(x_j) \stackrel{(I)}{=} \sum_{j=1}^n f^*(\xi_{i,j})f_j$. Daí,

$$x_i = \lambda_{i,1}f_1 + \dots + \lambda_{i,n}f_n, \quad \lambda_{i,j} = f^*(\xi_{i,j}) \in \mathcal{E}_n. \quad (II)$$

Derivando (II) com relação a x_k temos:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \lambda_{i,j}}{\partial x_k} f_j + \lambda_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i \neq k \end{cases} = \delta_{i,k}. \quad (III)$$

Tomando $x = 0$, em (III) temos que

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_{i,j}(0)}{\partial x_k} f_j(0) + \lambda_{i,j}(0) \frac{\partial f_j(0)}{\partial x_k} = \delta_{i,k},$$

então

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{i,j}(0) \frac{\partial f_j(0)}{\partial x_k} = \delta_{i,k}, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Assim, $(\lambda_{i,j}(0)) \left(\frac{\partial f_j(0)}{\partial x_k} \right) = Id$, o que implica $\det \left((\lambda_{i,j}(0)) \left(\frac{\partial f_j(0)}{\partial x_k} \right) \right) = 1 \neq 0$, ou seja, $\det(\lambda_{i,j}(0)) \det \left(\frac{\partial f_j(0)}{\partial x_k} \right) \neq 0$, logo $\det \left(\frac{\partial f_j(0)}{\partial x_k} \right) \neq 0$.

Então, pelo Teorema da Função Inversa, segue que f é um difeomorfismo. ■

O principal resultado deste estudo é o teorema que está enunciado abaixo, pois com ele demonstramos que a codimensão de um germe é um invariante sob a \mathcal{R} -equivalência.

Teorema 32. *Se os germes $f, g \in \mathcal{E}_n$ são \mathcal{R} -equivalentes então $\text{cod } f = \text{cod } g$.*

Prova: Uma vez que f e g são \mathcal{R} -equivalentes segue que existe um germe invertível $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $g = f \circ h$. Pela proposição anterior temos que h induz um isomorfismo de álgebras $h^* : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$.

Observe que $h^*(J_f) = J_g$, de fato, seja $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in J_g$, qualquer, temos

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial(f \circ h)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ h \right) \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n h^* \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \in h^*(J_f).$$

Portanto, $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in h^*(J_f)$ e assim temos, $J_g \subset h^*(J_f)$.

Agora, seja $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in J_f$, qualquer. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial(g \circ h^{-1})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ h^{-1} \right) \cdot \frac{\partial h_j^{-1}}{\partial x_i} = \\ &= \sum_{j=1}^n (h^{-1})^* \frac{\partial g}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h_j^{-1}}{\partial x_i} \in (h^{-1})^*(J_g). \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in (h^{-1})^*(J_g) = (h^*)^{-1}(J_g)$ e assim temos $J_f \subset (h^*)^{-1}(J_g)$. Logo, $h^*(J_f) \subset J_g$ e portanto, $h^*(J_f) = J_g$.

Consequentemente $\frac{\mathcal{E}_n}{J_f}$ e $\frac{\mathcal{E}_n}{J_g}$ são isomorfos. Portanto, $\dim \frac{\mathcal{E}_n}{J_f} = \dim \frac{\mathcal{E}_n}{J_g}$, ou seja, $\text{cod } f = \text{cod } g$. ■

A contra-positiva do teorema acima é muito utilizada, pois nos diz que se dois germes tem codimensão diferente então eles não são \mathcal{R} -equivalentes. Nos exemplos 28 e 29 temos que $\text{cod } f = 5$ e $\text{cod } g = 7$, logo f e g não são germes \mathcal{R} -equivalentes.

Agradecimentos: Este conteúdo científico é parte do projeto intitulado ‘Sobre o teorema da função inversa e suas aplicações em Teoria de Singularidades’ financiado pela agência de fomento FAPESP e vinculado ao projeto temático ‘Singularidades, Geometria e Equações Diferenciais’, com a supervisão do Prof. Dr. Marcelo José Saia – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação–ICMC/USP/São Carlos.

Abstract: In this work we show how calculate the codimension of germs from $\mathbb{R}^n, 0$ to \mathbb{R} and we prove that this object is \mathcal{R} -invariant.

Keywords: map germ, jacobian ideal and codimension of map germ.

Referências Bibliográficas

- [1] Gibson, C.G.; *Singular Points of Smooth Mapping*, Pitman Publishing Limited, 1979.
- [2] Lima, E.L.; *Curso de Análise*, vol.2, 8a.edição, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 2005.
- [3] Lima, E.L.; *Análise no Espaço \mathbb{R}^n* , 1a.edição, Rio de Janeiro, IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2004.

Os Modelos de Montroll, Gompertz e Smith para Dinâmica de Populações

Francielle Santo Pedro

Orientador(a): Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

Resumo: Analisamos neste trabalho os Modelos de Montroll, Gompertz e Smith, comparando as taxas de crescimento intrínseco e os pontos de equilíbrio dos mesmos.

Palavras-chave: Dinâmica populacional, ponto de equilíbrio, taxa de variação.

1 Introdução

Há muito tempo os cientistas de diversas áreas procuram ferramentas matemáticas para poderem estimar, por exemplo, o crescimento de uma população. O economista e demógrafo inglês Thomas Robert Malthus foi responsável pela primeira tentativa de estimar o crescimento da população mundial. Seu trabalho, “An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society”, publicado anonimamente em 1798, usou um modelo baseado no fato que o crescimento populacional se daria segundo uma progressão geométrica, se não fosse controlado, enquanto os meios de sobrevivência cresceriam em progressão aritmética. Lotka e Volterra também se destacaram pelo estudo de modelos do tipo presa-predador e competição entre espécies, publicados na década de 30. O trabalho de Lotka e Volterra trouxe inúmeras contribuições à área e influenciou o trabalho de Kermack e McKendrick (1927) no estudo de surtos epidêmicos.

Muitas críticas foram feitas a estes modelos clássicos por não considerarem certas características biológicas, como efeitos ambientais, taxas dependentes do tempo, distribuição espacial, dentre outros. No entanto, segundo Edelstein-Keshet[4] “a importância destes modelos não está no realismo ou na precisão das

previsões, mas em princípios e fundamentos nos quais se baseiam: a tendência de sistemas presa-predador oscilarem, a tendência de uma competição entre espécies extinguir uma delas, dentre outros”. O modelo malthusiano falha pelo fato de prever crescimentos populacionais cada vez maiores, o que não acontece na realidade. Dessa forma, novos modelos foram propostos modificando a taxa de crescimento intrínseco da população.

Neste estudo daremos ênfase na evolução dos modelos de dinâmica populacional a partir do Modelo de Malthus, comparando-os quando possível. Podemos destacar os modelos de Gompertz, Montroll e Smith, já que o de Verhulst, considerado a extensão mais simples de Malthus, é bastante conhecido na literatura. Esses modelos levam em conta o efeito da superpopulação, considerando que a taxa de crescimento intrínseco não é uma reta.

2 Os Modelos Clássicos: Malthus e Verhulst

Segundo Malthus, o crescimento populacional se daria por uma progressão geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresceriam em progressão aritmética. Traduziremos essa lei em termos de equações diferenciais. Considere $P = P(t)$ o total da população num instante t . Num intervalo de tempo Δt , a Lei de Malthus pressupõe que o número de nascimentos seja $\alpha P(t)\Delta t$ e o número de mortes seja $\beta P(t)\Delta t$, onde α é o coeficiente de natalidade e β o de mortalidade. Assim,

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = (\alpha - \beta)P(t)$$

Considerando $(\alpha - \beta) = \gamma$ e tomando o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{dP}{dt} = \gamma P \quad (1.1)$$

A solução de 1.1 para $P(0) = P_0$ é dada por

$$P(t) = P_0 e^{(\alpha - \beta)t}. \quad (1.2)$$

Geralmente, os modelos de dinâmica populacional unidimensionais e densidade-dependentes são dados por $dP/dt = f(P)P$, onde $f(P)$ é chamado taxa

de crescimento intrínseco da população. No modelo de Malthus $f(P) = \gamma$, onde γ é constante. Levando em conta os fatores inibidores (guerra, fome, epidemias, condições sanitárias, ...), o primeiro modelo que incorpora a influência da população na taxa de crescimento foi formulado pelo matemático belga Pierre F. Verhulst, em 1837. Ele propôs uma primeira modificação na equação original de Malthus. O modelo de Verhulst supõe que uma população deverá crescer até um limite máximo sustentável, dado por

$$P_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t),$$

e que a taxa de crescimento intrínseco $f(P)$ depende da própria população. Além disso, essa taxa é decrescente à medida que a população aumenta. Assim, o modelo de Verhulst é dado por

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left(\frac{P_{\infty} - P}{P_{\infty}} \right), \quad (1.3)$$

onde $\lambda > 0$ e

$$f(P) = \lambda \left(\frac{P_{\infty} - P}{P_{\infty}} \right).$$

O ponto de inflexão ocorre em $\frac{P_{\infty}}{2}$. A equação (1.3) também é conhecida como modelo Logístico, e sua solução, considerando $P(0) = P_0$ é

$$P(t) = \frac{P_0}{\left[\frac{P_{\infty}}{P_0} - 1 \right] e^{-\lambda t} + 1} \quad (1.4)$$

A vantagem do modelo de Verhulst sobre o de Malthus está principalmente no fato de incorporar os efeitos da superpopulação e, conseqüentemente, $P(t)$ tende a um valor P_{∞} fixado. Para maiores detalhes, veja Bassanezi (1988)[1].

3 Os Modelos de Montroll, Gompertz e Smith

Outros modelos também levam em conta o efeito da superpopulação, considerando que a taxa de crescimento intrínseco não é uma reta. Destacamos aqui os modelos de Montroll, Gompertz e Smith. Vamos considerar que a população atinja um limite máximo sustentável, dado por $P_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$.

3.1 O Modelo De Montroll (1971)

O modelo de Montroll é dado pela equação diferencial não linear

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right], \quad \lambda > 0 \quad e \quad \alpha > 0, \quad (1.5)$$

cujos pontos de equilíbrio são em $P = 0$ e $P = P_\infty$ e λ é a taxa de crescimento relativa quando P é “pequeno”. Quando $\alpha = 1$ a equação (1.5) é simplesmente o modelo de Verhulst (1.4) e sabemos que o ponto de inflexão da curva solução ocorre em $\frac{P_\infty}{2}$. Para determinar o ponto P_m , onde o crescimento é máximo, é necessário analisarmos o sinal de $\frac{d^2P}{dt^2}$, dado por

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda \frac{dP}{dt} \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha - \alpha \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right].$$

Como:

- $\frac{dP}{dt} > 0$ para $0 < P < P_\infty$ e $\frac{dP}{dt} < 0$ para $P > P_\infty$;
- $1 - (\alpha + 1) \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha > 0$ para $P < P_\infty \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$,

a análise do sinal de $\frac{d^2P}{dt^2}$ nos permite concluir que

$$P_m = P_\infty \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.6)$$

é ponto de inflexão.

Assim, dado P_∞ , o valor P_m depende somente do parâmetro α , ou seja, este parâmetro é o indicador do ponto de inflexão da curva solução.

Observamos de (1.6) que quando $\alpha > 0$ decresce, P_m também decresce e tende a um valor positivo igual a $\frac{P_m}{e} \cong 0,3678P_\infty$, isto é,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P_m = \frac{P_\infty}{e}.$$

Por outro lado, quando α cresce, o ponto P_m tende ao próprio valor P_∞ , ou seja,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} P_m = P_\infty.$$

O modelo de Montroll é utilizado para populações que têm comportamento semelhante ao modelo logístico, mas o ponto de inflexão não é $\frac{P_\infty}{2}$.

3.2 Modelo De Gompertz

O modelo de Gompertz (1825) utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável. Dessa forma, a taxa de crescimento é alta no início do processo e muda rapidamente para um crescimento mais lento. Em termos de equações diferenciais, é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \ln \frac{P_\infty}{P},$$

onde $\lambda > 0$. Analisando os pontos de equilíbrio desse modelo, obtemos os mesmos do modelo de Verhulst, assim como o seu comportamento assintótico. Com relação ao ponto de inflexão, obtemos através da equação

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda^2 P \ln \frac{P_\infty}{P} \left(\ln \frac{P_\infty}{P} - 1 \right)$$

que ele é dado por

$$P_m = \frac{P_\infty}{e}.$$

Podemos observar que o ponto de inflexão desse modelo corresponde ao valor limiar ($\alpha \rightarrow 0^+$) do modelo de Montroll. Outra formulação do modelo de Gompertz é apresentada e analisada em Bassanezi (2002) [2]. Os modelos de Gompertz são bastante utilizados no estudo de tumores sólidos .

3.3 Modelo De Smith

O modelo de Smith é dado pela equação diferencial não linear

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\lambda P(P_\infty - P)}{(P_\infty + aP)},$$

onde λ e a são constantes positivas. Os pontos de equilíbrio do modelo de Smith são obtidos considerando $\frac{dP}{dt} = 0$ na equação acima, ou seja, $P = 0$ ou $P = P_\infty$.

Com relação ao ponto de inflexão, obtemos através da equação

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{\lambda \frac{dP}{dt} [P_\infty^2 - 2PP_\infty - aP^2]}{(P_\infty + aP^2)}$$

que ele é dado por

$$P_m = P_\infty \left(\frac{\sqrt{1+a} - 1}{a} \right).$$

Novamente, o ponto de inflexão da curva solução depende dos parâmetros a e P_∞ .

4 Considerações finais

A solução dos modelos aqui apresentados se comportam de maneira semelhante, onde os pontos de equilíbrio, que são as soluções constantes, são os mesmos. No entanto, o ponto de inflexão da curva solução, quando existe, é diferente para cada modelo estudado. Assim, levando em conta um crescimento inibido e assintótico de uma população, outros modelos podem ser construídos com essas mesmas características.

Um novo tratamento vem sendo dado a estes modelos utilizando teoria de conjuntos fuzzy e modelagem através de bases de regras fuzzy. Esse tipo de abordagem permite a inclusão de alguns aspectos de incertezas presentes no fenômeno, o que não é possível através de equações diferenciais clássicas (Barros e Bassanezi, 2006) [3].

Abstract: We reviewed in this work the Montroll, Gompertz and Smith models, comparing the rates of intrinsic growth and the equilibrium points of them.

Keywords: population dynamics, equilibrium point, variation rate.

Referências Bibliográficas

- [1] Bassanezi, R.C., Ferreira Jr., W.C.; *Equações Diferenciais com aplicações*, São Paulo: Harbra, 1988.
- [2] Bassanezi, R.C.; *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, São Paulo: Contexto, 2002.
- [3] Barros, L.C., Bassanezi, R.C.; *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, Coleção IMECC Livros didáticos - vol. 5, 2006.
- [4] Edelstein-Keshet, L.; *Mathematical Models in Biology*, New York: McGraw-Hill, 1988.

Introdução à Teoria das Equações Diferenciais com Retardamento

Maria Carolina Stefani Mesquita Macena¹

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Neste trabalho introduzimos o conceito de uma equação diferencial com retardamento (EDR), apresentamos uma prova para o Teorema de Existência e Unicidade de solução e definimos estabilidade. Além disso, exemplificamos algumas diferenças entre a teoria de EDO e EDR.

Palavras-chave: equações diferenciais com retardamento, existência de solução, estabilidade.

1 Motivação

Consideremos inicialmente a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = x(t - 1) \tag{1.1}$$

onde $t \geq 0$ e x real.

Note que em (1.1), a derivada da função no instante t , depende da solução no instante $t - 1$. Este exemplo é um tipo de **equação diferencial com retardamento**, com retardo igual a 1. Veremos que para este tipo de equação, a determinação da solução depende não apenas do conhecimento da mesma em um instante inicial t_0 , como no caso de uma equação diferencial ordinária (EDO), mas sim do conhecimento da solução em um intervalo anterior a t_0 , o que implica que a condição inicial deve ser uma função.

Se conhecermos uma função contínua ϕ definida em $[t_0 - 1, t_0]$, podemos construir uma solução de (1.1). Para isto, fixemos primeiramente $t \in [t_0, t_0 + 1]$, então definimos $x_1(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x(s - 1) ds$, onde $x(t_0) = \phi(t_0)$ e $x(s - 1) = \phi(s - 1)$ onde $s \in [t_0, t_0 + 1]$.

¹Bolsista BAAE

Em seguida, construímos a solução no intervalo $t \in [t_0 + 1, t_0 + 2]$, que é dada por $x_2(t) = x_1(t_0 + 1) + \int_{t_0+1}^t x_1(s-1) ds$.

Procedendo dessa forma, teremos para $t \in [t_0 + n, t_0 + (n + 1)]$, a função

$$x_{n+1}(t) = x_n(t_0 + n) + \int_{t_0+n}^t x_n(s-1) ds.$$

Ou seja, a solução da EDR (1.1) definida em $[t_0 - 1, \infty)$ é dada por

$$x(t) = \phi(t), \text{ com } t \in [t_0 - 1, t_0] \text{ e}$$

$$x(t) = x_j(t) \text{ para } t \in [t_0 + j - 1, t_0 + j] \text{ com } j = 1, 2, \dots$$

e depende da condição inicial ϕ dada. Nessa construção fica claro a importância de conhecer a solução no intervalo $[t_0 - 1, t_0]$ e não apenas no instante t_0 .

2 Equações Diferenciais com Retardamento

Nesta seção definimos uma EDR geral e introduzimos as notações e conceitos necessários para estabelecermos o Teorema de Existência e Unicidade de solução de equações diferenciais com retardamento.

Sejam h, H com $0 \leq h < \infty, 0 < H \leq \infty$, consideremos o conjunto $C_H = \{\varphi \in C; \|\varphi\| < H\}$, onde $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-h, 0]$ em \mathbb{R}^n , com a norma $\|\varphi\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$, onde $|\cdot|$ é a norma usual do \mathbb{R}^n .

Sejam também $A, 0 < A \leq \infty$ e $x(t)$ uma função contínua em $[t_0 - h, t_0 + A]$ com valores em \mathbb{R}^n . Para cada t , com $t_0 \leq t < t_0 + A$, definimos x_t como sendo o elemento de C dado por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, para $-h \leq \theta \leq 0$.

Dada $x \in C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, não é difícil provar que a aplicação

$$\begin{aligned} F : [t_0, t_0 + A] &\longrightarrow C \\ t &\longmapsto x_t \end{aligned}$$

é contínua.

Definição 1. Seja $f(t, \varphi)$ uma aplicação definida num subconjunto de $\mathbb{R} \times C_H$ com imagem em \mathbb{R}^n , a relação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (1.2)$$

é chamada **equação diferencial com retardamento** e denotamos por **EDR**.

Observemos que quando $h = 0$, a equação diferencial com retardamento se reduz a uma equação diferencial ordinária.

Definição 2. Uma função $x(t)$, contínua em $[t_0 - h, t_0 + A)$, $0 < A \leq \infty$, $t_0 \geq 0$, é **uma solução** da equação diferencial com retardamento (1.2), se existir a derivada de $x(t)$ em $[t_0, t_0 + A)$ e $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + A)$.

Em seguida temos a definição de contração e o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o qual será útil na prova de existência e unicidade de solução para EDR.

Definição 3. Seja X um espaço métrico completo com a métrica d . Uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é dita uma **contração uniforme**, se existir uma constante $0 \leq \beta < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \beta d(x, y)$, $\forall x, y \in X$.

Teorema 4 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja X um espaço métrico completo com a métrica d . Se a aplicação $f : X \rightarrow X$ é uma contração uniforme, então existe um único ponto fixo $x^* \in X$ de f , ou seja, $f(x^*) = x^*$.*

Definição 5. Dizemos que $f(t, \varphi)$ é **lipschitziana relativamente à φ** em $[0, \tau] \times C_{H_1}$, $0 < H_1 < H$, se existir $L = L(\tau, H_1)$ tal que

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq L \|\varphi_2 - \varphi_1\|,$$

para $0 \leq t \leq \tau$ e φ_1, φ_2 em C_{H_1} .

Definição 6. Dizemos que $f(t, \varphi)$ é **localmente lipschitziana relativamente à φ** em $[0, \infty) \times C_H$, se $f(t, \varphi)$ for lipschitziana relativamente a φ em $[0, \tau] \times C_{H_1}$ para $\forall \tau, H_1$, $0 < \tau < \infty$, $0 < H_1 < H$.

Definição 7. Sejam $t_0 \geq 0$ e $\psi \in C_H$, a função $x(t)$, contínua em $[t_0 - h, t_0 + A)$ com $A > 0$, diferenciável em $[t_0, t_0 + A)$ é **uma solução** de (1.2) com função inicial ψ em t_0 se, $x_t \in C_H$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$, $x_{t_0} = \psi$ e $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$.

Teorema 8 (Teorema de Existência e Unicidade para EDR). *Seja $f(t, \varphi)$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a φ em $[0, \infty) \times C_H$. Então para qualquer $t_0 \geq 0$, $\psi \in C_H$, existem $A > 0$ e uma função $x(t)$ definida em $[t_0 - h, t_0 + A)$ que é solução de (1.2) com função inicial ψ em t_0 , isto é, $x_{t_0} = \psi$. Ainda mais, esta solução é única.*

Prova: Seja

$$F = \{x \in C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n); \|x\| \leq H_1 \text{ e } x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), -h \leq \theta \leq 0\},$$

onde H_1 é escolhido de modo que $\|\psi\| < H_1 < H$ e $A > 0$ a ser fixado convenientemente.

Não é difícil provar que F é um espaço métrico completo.

Consideremos T , a aplicação de F em $C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, definida por $(Tx)(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$, se $-h \leq \theta \leq 0$ e

$$(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A.$$

Vamos mostrar que T , para A conveniente, é uma aplicação de F em F . Para isso basta mostrarmos que $\|Tx\| \leq H_1$. Notemos que,

$$|(Tx)(t)| \leq |\psi(0)| + \int_{t_0}^{t_0+A} |f(s, x_s)| ds, \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + A. \quad (1.3)$$

Temos também que $\|x_s\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |x_s(\theta)| \leq H_1$, para $t_0 \leq s \leq t_0 + A$, pois $\|x\| \leq H_1$. Fazendo a restrição $A \leq 1$, obtemos

$$|f(s, x_s)| \leq |f(s, x_s) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \leq \|x_s\|L + |f(s, 0)| \leq LH_1 + K,$$

onde $K = \sup_{t_0 \leq \tau \leq t_0+1} |f(\tau, 0)|$ e $L = L(t_0 + 1, H_1)$.

Substituindo em (1.3), segue que

$$|(Tx)(t)| \leq |\psi(0)| + A[H_1L + K], \text{ para } t_0 \leq t \leq t_0 + A.$$

Por outro lado, como $\|\psi\| < H_1$, existe H_2 tal que $\|\psi\| < H_2 < H_1$, pois \mathbb{R} é arquimediano.

Logo $|(Tx)(t)| < H_2 + A[H_1L + K] < H_1$, para $A = \min\{1, \frac{H_1 - H_2}{H_1L + K}\}$. Portanto, $\|Tx\| < H_1$. Assim T é uma aplicação de F em F , considerando A dado acima.

Escolhendo agora A não só com a indicação anterior, mas também com a exigência $A < \frac{1}{L}$, vamos mostrar que T é uma contração de F em F .

Dados x e y em F , sejam

$$\begin{cases} (Tx)(t_0 + \theta) = \psi(\theta), & -h \leq \theta \leq 0 \\ (Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, & t_0 \leq t \leq t_0 + A \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Ty)(t_0 + \theta) = \psi(\theta), & -h \leq \theta \leq 0 \\ (Ty)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, y_s) ds, & t_0 \leq t \leq t_0 + A \end{cases}$$

Observemos que para $t_0 - h \leq t \leq t_0$, temos $Tx = Ty$, assim

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| = 0, \text{ para } t_0 - h \leq t \leq t_0.$$

Agora analisemos $t \in [t_0, t_0 + A]$, neste caso

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_s) - f(s, y_s)| ds \leq \int_{t_0}^{t_0+A} L \|x_s - y_s\| ds. \quad (1.4)$$

Notemos que $\|x_s - y_s\| \leq \|x - y\|$, para $t_0 \leq s \leq t_0 + A$, pois $\|x_s - y_s\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |x_s(\theta) - y_s(\theta)| \leq \sup_{t_0 - h \leq t \leq t_0 + A} |x(t) - y(t)| = \|x - y\|$. Substituindo em (1.4), temos

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq AL \|x - y\|, \text{ para } t_0 - h \leq t \leq t_0 + A.$$

Logo $\|Tx - Ty\| \leq AL \|x - y\|$, com $AL < 1$, portanto T é uma contração.

Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma e só uma função $x \in F$ tal que

$$\begin{cases} x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), & -h \leq \theta \leq 0 \\ x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, & t_0 \leq t \leq t_0 + A. \end{cases}$$

Essa função corresponde à solução de (1.2) com a condição inicial $x_{t_0} = \psi$. ■

Exemplo 9. Dado o instante inicial $t_0 = 0$, consideremos o seguinte problema $\dot{x}(t) = x\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$, $x_0 = \psi$, com $\psi(\theta) = \sin \theta$, para $\theta \in \left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right]$. Notemos que nesse exemplo $f(t, \phi) = f(\phi) = \phi(-3\pi/2)$ e portanto está nas condições do Teorema de Existência e Unicidade.

Então vamos construir de forma recursiva, a sua única solução:

(i) Para $t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$,

$$x_1(t) = x_0(0) + \int_0^t x\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds = -\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin t.$$

(ii) Para $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \int_{\frac{3\pi}{2}}^t x\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds = -1 + \int_{\frac{3\pi}{2}}^t \sin\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds = \\ &= -\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin t. \end{aligned}$$

(iii) E assim sucessivamente, podemos estabelecer que a solução deste problema é dada por $x(t) = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \infty\right)$.

Por outro lado se tomarmos o segundo problema, $\dot{x}(t) = x\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$, $x_0 = \psi = \cos \theta$, $\theta \in \left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right]$, podemos mostrar que a sua solução é dada por $x(t) = \cos(t)$, com $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \infty\right)$, de forma análoga.

Este exemplo ilustra um dos contrastes entre a teoria de EDO e EDR, pois para equações diferenciais ordinárias, as soluções da mesma equação, com condições iniciais diferentes nunca se interceptam, diferentemente do que constatamos acima, onde as funções $\sin t$ e $\cos t$ se interceptam em infinitos pontos e são soluções da mesma EDR.

3 Estabilidade.

Nesta seção vamos supor que a função f de (1.2) seja contínua e localmente lipschitziana relativamente a φ . Indicamos por $x(t; t_0, \varphi)$ a solução de (1.2) cuja função inicial em t_0 é φ . Usamos a notação $x_t(t_0, \varphi)$, para indicar o elemento de C dado por $x_t(t_0, \varphi) = x(t + \theta; t_0, \varphi)$, para $\theta \in [-h, 0]$. Vamos supor que $f(t, 0) = 0$, $\forall t \geq 0$, para que a origem seja um ponto de equilíbrio de (1.2).

A definição de estabilidade a seguir é dada em relação ao ponto de equilíbrio $x = 0$ de (1.2).

Definição 10 (Estabilidade). Dados $\epsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \delta$ e $t \geq t_0$ implicam $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \epsilon$.

Observação 11. No caso de uma EDO do tipo $\dot{x} = f(t, x)$, com a função f satisfazendo $f(t, 0) = 0$, se $\delta(\epsilon, t_0)$ puder ser determinado de acordo com a definição acima para algum $t_0 = \bar{t}_0$, então, $\delta(\epsilon, t_0)$ poderá ser determinado para qualquer $t_0 \geq \bar{t}_0$. Isto se deve ao fato de que a aplicação $x_0 \mapsto x(t_0, \bar{t}_0, x_0)$ (neste caso $x(t_0, \bar{t}_0, x_0)$ indica a solução da EDO, que no instante \bar{t}_0 vale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, calculada em t_0) induz um homeomorfismo entre duas vizinhanças de $x = 0$, desde que $f(t, x)$ seja contínua e satisfaça alguma condição de unicidade para o problema de valor inicial.

Para provarmos este fato para EDO, precisamos do resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [1].

Teorema 12. *Suponha que $f(t, x)$ seja contínua para todo $(t, x) \in A$, onde A é um aberto do \mathbb{R}^{n+1} . Se $x(t, \bar{t}_0, x_0)$ com $x(\bar{t}_0, \bar{t}_0, x_0) = x_0$ é a única solução de $\dot{x} = f(t, x)$ em $[a, b]$ com $x(\bar{t}_0) = x_0$. Então existe uma solução $x(t; s, \eta)$ da EDO dada por $\dot{x} = f(t, x)$, definida em $[a, b]$ e $\forall s, \eta$ suficientemente próximos a \bar{t}_0, x_0 e é uma função contínua de (t, s, η) em (t, \bar{t}_0, x_0) .*

Agora vamos justificar a observação 11.

Se $f(t, 0) = 0$, para todo $t \geq 0$, então a solução nula $x = 0$ de $\dot{x} = f(t, x)$ está

definida em $[0, b]$, com $b > 0$ e suponha $\bar{t}_0 \in [0, b]$, então existe uma vizinhança $U(0)$ de 0 para a qual a solução $x(t, \bar{t}_0, x_1)$, existe para $t \in [0, b]$ com $x_1 \in U(0)$.

Então definimos para cada t ,

$$F_t : U(0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x_1 \longmapsto x(t, \bar{t}_0, x_1)$$

Ou seja, F_t é uma função definida numa vizinhança de $x = 0$ que leva cada $x_1 \in \mathbb{R}^n$ dessa vizinhança no ponto $x(t, \bar{t}_0, x_1) \in \mathbb{R}^n$. Mostremos que F_t é homeomorfismo.

- (i) F_t é contínua, pelo Teorema 12.
- (ii) F_t é injetora, pois pelo Teorema de Existência e Unicidade para EDO, dado $x_1 \in U(0)$ existe uma única solução $x(t, \bar{t}_0, x_1)$ e as soluções de uma mesma EDO não se interceptam. Considerando $V = F_t(U(0))$ então $F_t : U(0) \rightarrow V$ é bijetora.
- (iii) Por (ii), existe

$$F_t^{-1} : V \longrightarrow U(0)$$

$$x^* \longmapsto x(\bar{t}_0, t, x^*) = x_1$$

Denotemos $x_2 = x(\bar{t}_0, t, x^{**})$ para algum x^{**} . Provemos que F_t^{-1} é contínua em x^* . De fato, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ (garantido pelo Teorema 12), tal que se $|x^* - x^{**}| < \delta$, vale

$$|x_1 - x_2| = |x(\bar{t}_0, t, x^*) - x(\bar{t}_0, t, x^{**})| < \epsilon.$$

Exemplo 13. Consideremos a seguinte equação com retardamento:

$$\dot{x}(t) = b(t)x\left(t - \frac{3}{2}\pi\right) \text{ onde } \begin{cases} b(t) = 0, & 0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi \\ b(t) = -\cos t, & \frac{3}{2}\pi \leq t \leq 3\pi \\ b(t) = 1, & t > 3\pi \end{cases}$$

Dado uma condição inicial $\varphi \in C\left(\left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right], \mathbb{R}\right)$, vamos construir a solução:

i) Para $0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$, temos que:

$$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) = c = \varphi(0)$$

ii) Para $\frac{3}{2}\pi \leq t \leq 3\pi$, temos que:

$$\frac{3}{2}\pi \leq t \leq 3\pi \Rightarrow 0 \leq t - \frac{3}{2}\pi \leq 3\pi - \frac{3}{2}\pi$$

Assim,

$$\dot{x}(t) = -\cos t \varphi(0)$$

Integrando, obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) - x\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= -\int_{\frac{3}{2}\pi}^t \varphi(0) \cos t dt \\ x(t) - \varphi(0) &= -\varphi(0) \operatorname{sen} t - \varphi(0) \\ x(t) &= -\varphi(0) \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

iii) Para $t \in [3\pi, \frac{9}{2}\pi]$, temos

$$\dot{x} = 1 \cdot x\left(t - \frac{3}{2}\pi\right)$$

Note que, $x\left(t - \frac{3}{2}\pi\right) = -\varphi(0) \operatorname{sen} t$, pois $3\pi \leq t \leq \frac{9}{2}\pi \Rightarrow \frac{3}{2}\pi \leq t - \frac{3}{2}\pi \leq 3\pi$.

Logo por (ii), segue o resultado e portanto

$$x(t) = -\varphi(0) \operatorname{sen} t, \text{ para } t \in [3\pi, \frac{9}{2}\pi].$$

iv) Para $t \geq 3\pi$, temos:

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(0), & 0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi \\ -\varphi(0) \operatorname{sen} t, & t \geq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Observemos que para $t_0 = 0$ a condição de estabilidade é satisfeita, por outro lado se $t = 3\pi$, temos que nossa equação fica da forma $\dot{x} = x\left(t - \frac{3}{2}\pi\right)$ para $t \geq 3\pi$, e assim existe $\lambda > 0$ de modo que $x = ce^{\lambda t}$ seja solução para todo c . Isto significa que, $\lambda ce^{\lambda t} = ce^{\lambda(t - \frac{3}{2}\pi)} \Rightarrow \lambda = e^{-\frac{3}{2}\pi\lambda} \Rightarrow \lambda e^{\frac{3}{2}\pi\lambda} = 1$ e geometricamente analisando os gráficos de

$$\begin{cases} y = \lambda \\ y = e^{-\lambda \frac{3\pi}{2}} \end{cases}$$

podemos ver que $\exists \lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 = e^{-\lambda_0 \frac{3\pi}{2}}$. Portanto, $|x(t)| = |c| e^{\lambda_0 t} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ e em qualquer vizinhança da função inicial zero, existe uma infinidade de funções iniciais φ de modo que $|x(t; 3\pi, \varphi)| \rightarrow \infty$, com $t \rightarrow \infty$, assim a condição de estabilidade não está satisfeita para $t_0 = 3\pi$. Portanto a observação 11 não é válida para EDR, já que mostramos a existência de dois instantes iniciais de modo que para um deles a condição de estabilidade é satisfeita e para o outro não.

Agradecimentos: Em especial à professora Marta Cilene Gadotti, pela orientação e incentivo durante o desenvolvimento deste projeto, e ao IGCE-Unesp, pelo apoio financeiro.

Abstract: In this work we introduce the concept of retarded differential equations (RDE), we establish the Existence and Uniqueness Theorem of solution and we define stability. Furthermore we show some differences between ODE and RDE.

Keywords: retarded differential equations, existence of solution, stability.

Referências Bibliográficas

- [1] Hale, J.K.; *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, INC, New York, 1980.
- [2] Onuchic, N.; *Equações Diferenciais com Retardamento*, Notas, São Carlos, 1971.
- [3] Oliveira, C.R.; *Introdução à Análise Funcional*, 2a edição, IMPA, 2009.

Distribuição Gama e Aplicações

Maria Cristina Martins¹

Orientador(a): Prof. Dr. José Silvio Govone

Resumo: O estudo da função distribuição de probabilidade Gama tem grande importância na estatística e é um modelo de probabilidade muito usado para tempos de espera, por exemplo, em testes de vida útil. O tempo de espera até a “morte” é uma variável aleatória que tem, muitas vezes, uma distribuição gama.

Como casos especiais da Gama, temos a exponencial que é amplamente empregada em teoria de filas, relacionada a tempo de espera no atendimento e a distribuição qui-quadrado (χ^2), muito útil na inferência estatística.

Palavras-chave: Distribuição Gama, Distribuição Qui-Quadrado, Distribuição Exponencial.

1 Distribuição Gama

Uma variável aleatória X com função distribuição de probabilidade cuja função densidade de probabilidade (f.d.p.) f é da forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\frac{-x}{\beta}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é dita ter uma distribuição gama com parâmetros α e β com $\alpha, \beta > 0$, onde

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

De fato,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp^{-x} dx \quad (1.1)$$

$\Gamma(\alpha)$ é definida acima para algum valor real de α , exceto zero e integrais negativas. Para integrais positivas faremos a demonstração:

¹Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) - SESu/MEC

Da definição temos para $\alpha = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \exp^{-x} dx = -\exp|_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1. \quad (1.2)$$

Para investigar as propriedades da função Gama resolveremos primeiramente a seguinte integral por partes:

$$\int_0^t x^{\alpha-1} \exp^{-x} dx = \int_0^t u dv = uv|_0^t - \int_0^t v du,$$

com,

$$\begin{aligned} u &= x^{\alpha-1} & dv &= \exp^{-x} dx \\ du &= (\alpha - 1)x^{\alpha-2} dx & v &= -\exp^{-x} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^t x^{\alpha-1} \exp^{-x} dx = -t^{\alpha-1} \exp^{-t} + (\alpha - 1) \int_0^t x^{\alpha-2} \exp^{-x} dx.$$

Usando o Teorema de L'Hopital, $(t^{\alpha-1} \exp^{-t})$ se aproxima de 0 quando t tende a ∞ . Assim, quando t tende a ∞ :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp^{-x} dx = (\alpha - 1) \int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)-1} \exp^{-x} dx. \quad (1.3)$$

Agora da segunda integral de $\Gamma(\alpha - 1)$ temos

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) \quad (1.4)$$

e substituindo α por $\alpha + 1$ temos

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \implies \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha}. \quad (1.5)$$

Por repetição do uso de 1.4 segue que

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) = (\alpha - 1)(\alpha - 2)\Gamma(\alpha - 2) = \\ &= (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (\alpha - 1)! \end{aligned}$$

já que por 1.2 temos que $\Gamma(1) = 1$. Portanto $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ se α é uma integral positiva. ■

Tabelas de valores $\Gamma(\alpha)$ são disponíveis para $1 < \alpha < 2$ e o uso das fórmulas 1.4 e 1.5 computam $\Gamma(\alpha)$ para algum valor positivo de α .

Observação: Para a variável aleatória W , o tempo necessário para obter exatamente k trocas (possível morte), onde k é um inteiro positivo fixado, a função de distribuição acumulada de W é $G(w) = Pr(W \leq w) = 1 - Pr(W > w)$.

O evento $W > w$, para $w > 0$ é equivalente ao evento na qual a menos que k mudanças num intervalo de tempo de comprimento w , isto é, se a variável aleatória X é o número de mudanças no intervalo de comprimento w então

$$Pr(W > w) = \sum_{x=0}^{k-1} Pr(X = x) = \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\lambda w)^x \exp^{-\lambda w}}{x!} = \int_{\lambda w}^{\infty} \frac{z^{k-1} \exp^{-z}}{(k-1)!} dz.$$

Logo, para $w > 0$,

$$G(w) = 1 - \int_{\lambda w}^{\infty} \frac{z^{k-1} \exp^{-z}}{(k-1)!} dz = \int_0^{\lambda w} \frac{z^{k-1} \exp^{-z}}{\Gamma(k)} dz$$

e para $w \leq 0$, $G(w) = 0$.

Agora, fazendo a mudança de variável de integração na integral que define $G(w)$ por escrever $z = \lambda y$, temos

$$G(w) = \begin{cases} \int_0^w \frac{\lambda^k y^{k-1} \exp^{-\lambda y}}{\Gamma(k)} dy, & w > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma, a f.d.p de W é

$$g(w) = G'(w) = \begin{cases} \frac{\lambda^k w^{k-1} \exp^{-\lambda w}}{\Gamma(k)}, & 0 < w < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1.1 Função Geradora de Momentos

Agora encontraremos a função geradora de momentos da distribuição Gama. Então,

$$M(t) = \int_0^{\infty} \exp^{tx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp^{-\frac{x}{\beta}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp^{-\frac{x(1-\beta t)}{\beta}} dx.$$

Podemos definir $y = \frac{x(1-\beta t)}{\beta}$, $t < \frac{1}{\beta}$ ou $x = \frac{\beta y}{(1-\beta t)}$ e obter

$$M(t) = \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left(\frac{\beta y}{1-\beta t} \right)^{\alpha-1} \exp^{-y} dy,$$

isto é, $M(t) = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^\alpha \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} \exp^{-y} dy = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$, $t < \frac{1}{\beta}$.

Agora,

$$M'(t) = (-\alpha)(1-\beta t)^{-\alpha-1}(-\beta),$$

$$M''(t) = (-\alpha)(-\alpha-1)(1-\beta t)^{-\alpha-2}(-\beta)^2.$$

Portanto, para a distribuição gama temos:

Média: $\mu = M'(0) = \alpha\beta$

Variância: $\sigma^2 = M''(0) - \mu^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$

A distribuição gama não apenas é um bom modelo de tempo de espera, mas uma para muitas variáveis aleatórias não-negativas do tipo contínuo. Como maneira de ilustrar, a distribuição de certas rendas poderia ser modelada satisfatoriamente pela distribuição gama, já que os dois parâmetros α e β possibilitam um grande fator de flexibilidade.

2 Distribuição Qui-Quadrado

Vamos considerar o caso especial da distribuição gama em que $\alpha = \frac{r}{2}$, onde r é um inteiro positivo e $\beta = 2$. Uma variável aleatória X do tipo contínuo que tem f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} \exp^{-\frac{x}{2}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a função geradora de momentos $M(t) = (1-2t)^{-\frac{r}{2}}$, $t < \frac{1}{2}$ se diz que tem uma distribuição qui-quadrado e qualquer $f(x)$ dessa forma é chamada de f.d.p. qui-quadrado. A média e a variância de uma distribuição qui-quadrado são $\mu = \alpha\beta = (\frac{r}{2})2 = r$ e $\sigma^2 = \alpha\beta^2 = (\frac{r}{2})2^2 = 2r$ respectivamente. Por razões não óbvias, chamamos de parâmetro r o grau de liberdade da distribuição qui-quadrado (ou de f.d.p. qui-quadrado). Como a distribuição qui-quadrado tem um papel importante em estatística e ocorre com frequência, a denominamos $\chi^2(r)$ para significar que a variável aleatória X tem uma distribuição qui-quadrado com r graus de liberdade.

Exemplo: Se X tem f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x \exp^{-\frac{x}{2}}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então X é $\chi^2(4)$. Portanto $\mu = 4, \sigma^2 = 8$ e $M(t) = (1 - 2t)^{-2}, t < \frac{1}{2}$.

3 Distribuição Exponencial

Agora, consideremos W a distribuição Gama com $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{\mu}$. A f.d.p de W é

$$g(w) = \begin{cases} \mu \exp^{-\mu w}, & 0 < w < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde μ é a média e W é chamada de *distribuição exponencial*.

Exemplo: Seja X uma variável aleatória exponencial com média $\mu = 3$. Calcule a) $P(3 < X < 6)$; b) $P(X > 6 | X > 3)$. Se $\mu = 3$ segue-se que $\beta = \frac{1}{3}$ e portanto a densidade de probabilidade de X :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \exp^{-\frac{1}{3}x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{a) } P(3 < X < 6) = \int_3^6 \frac{1}{3} \exp^{-\frac{1}{3}x} dx = -\exp^{-\frac{1}{3}x} \Big|_3^6 = -\exp^{-2} + \exp^{-1} = 0,232$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X > 6 | X > 3) &= \frac{P(X > 6, X > 3)}{P(X > 3)} = \frac{P(X > 6)}{P(X > 3)} = \frac{\int_6^{\infty} \frac{1}{3} \exp^{-\frac{1}{3}x} dx}{\int_3^{\infty} \frac{1}{3} \exp^{-\frac{1}{3}x} dx} = \\ &= \frac{-\exp^{-\frac{1}{3}x} \Big|_6^{\infty}}{\exp^{-\frac{1}{3}x} \Big|_3^{\infty}} = \frac{\exp^{-2}}{\exp^{-1}} = \exp^{-1} \Rightarrow P(X > 6 | X > 3) = \exp^{-1} = 0,3679 \end{aligned}$$

4 Conclusão

A distribuição de probabilidade Gama é muito útil em estatística, com grande número de aplicações. Essa teoria nos motiva para o estudo de modelos estatísticos bem como suas aplicações em resolução de problemas do nosso dia a dia.

Referências Bibliográficas

- [1] Hogg, R.V., Craig, A.T.; *Introduction to Mathematical Statistics*, fourth edition, Macmillan Company, 1978.
- [2] Meyer, P.L.; *Probabilidade - Aplicações à Estatística*, segunda edição, Copyright, 1983.
- [3] Dantas, C.A.B.; *Probabilidade: Um curso introdutório*, segunda edição, Edusp, 2000.
- [4] Magalhães, M.N., Lima, A.C.P.; *Noções de Probabilidade e Estatística*, sexta edição, Edusp, 2008.

A Integral de Riemann–Stieltjes e o Espaço Dual de $C([a, b])$

Victor Simões Barbosa¹

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: O objetivo deste trabalho é introduzir a integral de Riemann–Stieltjes, investigar algumas propriedades que essa integral satisfaz e relacioná-la com a integral de Riemann. Além disso, mostrar a sua importância para caracterizar os funcionais lineares contínuos sobre $C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ contínua}\}$.

Palavras-chave: Integral de Riemann–Stieltjes; Espaço Dual; Análise Funcional.

1 A Integral de Riemann–Stieltjes.

Consideremos duas funções reais $\alpha, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, α crescente e limitada em $[a, b]$. Supondo f uma função limitada, a cada partição $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, com $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, podemos definir

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i \quad \text{e} \quad s(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_i &= \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0, \\ M_i &= \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ m_i &= \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

A integral superior e inferior de Riemann–Stieltjes de f em $[a, b]$ com respeito a α são definidas respectivamente por:

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf_P S(P, f, \alpha) \tag{1.1}$$

¹Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET) - SESu/MEC

$$\int_a^b f d\alpha = \sup_P s(P, f, \alpha). \quad (1.2)$$

O supremo e o ínfimo são tomados sobre todas as partições de $[a, b]$.

Segue das definições anteriores que se f é limitada, isto é, $m \leq f(x) \leq M$, então

$$m(b-a) \leq s(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq M(b-a),$$

logo

$$s(P, f, \alpha) \leq \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha \leq S(P, f, \alpha).$$

Quando (1.1) é igual a (1.2), definimos a integral de Riemann-Stieltjes de f com respeito a α sobre $[a, b]$ como sendo este valor. Neste caso, dizemos que f é **R-S integrável** em relação a α .

Notação: $\int_a^b f d\alpha$.

Observação 1. Podemos verificar que a integral de Riemann é um caso particular da integral de Riemann-Stieltjes. Basta tomar $\alpha(x) = x$ em $[a, b]$.

Definição 2. Diremos que a partição P^* é um **refinamento** de P se $P^* \supset P$. Dadas duas partições P_1 e P_2 , dizemos que P^* é um **refinamento comum** de P_1 e P_2 se $P^* \supset P_1 \cup P_2$.

Lema 3. Se P^* é um refinamento de P , então:

$$s(P, f, \alpha) \leq s(P^*, f, \alpha) \quad e \quad S(P^*, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha).$$

Prova: Para provarmos a primeira desigualdade, suponhamos de início que P^* contém apenas um ponto a mais que $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Seja x^* tal ponto, e suponhamos que $x_{i-1} < x^* < x_i$, onde x_{i-1} e x_i são dois pontos consecutivos de P . Coloquemos

$$\begin{aligned} w_1 &= \inf f(x) \text{ em } [x_{i-1}, x^*], \\ w_2 &= \inf f(x) \text{ em } [x^*, x_i]. \end{aligned}$$

Claramente $w_1 \geq m_i$ e $w_2 \geq m_i$, onde

$$m_i = \inf f(x) \text{ em } [x_{i-1}, x_i].$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} s(P^*, f, \alpha) &= m_1(\alpha(x_1) - \alpha(x_0)) + m_2(\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) + \cdots \\ &\quad + w_1(\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})) + w_2(\alpha(x_i) - \alpha(x^*)) + \cdots \\ &\quad + m_n(\alpha(x_n) - \alpha(x_{n-1})). \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} s(P, f, \alpha) &= m_1(\alpha(x_1) - \alpha(x_0)) + m_2(\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) + \cdots \\ &\quad + m_i(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) + \cdots + m_n(\alpha(x_n) - \alpha(x_{n-1})), \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} s(P^*, f, \alpha) - s(P, f, \alpha) &= \\ &= w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + w_2[\alpha(x_1) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \\ &= (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_1) - \alpha(x^*)] \geq 0 \\ &\Rightarrow s(P^*, f, \alpha) \geq s(P, f, \alpha). \end{aligned}$$

Se P^* contém k pontos a mais que P , nós repetimos este procedimento para k pontos e obtemos o resultado. A demonstração é análoga para a outra desigualdade. ■

Teorema 4. *f é R - S integrável em $[a, b]$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$ existe uma partição P tal que*

$$S(P, f, \alpha) - s(P, f, \alpha) < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Prova: Para qualquer P temos, conforme observado anteriormente, que

$$s(P, f, \alpha) \leq \underline{\int} f d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha \leq S(P, f, \alpha),$$

assim, (1.3) implica que

$$0 \leq \overline{\int} f d\alpha - \underline{\int} f d\alpha \leq \varepsilon.$$

Portanto, se (1.3) for satisfeita para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$\overline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d\alpha,$$

ou seja, f é R-S integrável.

Reciprocamente, suponha que f seja R-S integrável e seja $\varepsilon > 0$ dado. Então existem partições P_1 e P_2 tais que

$$S(P_1, f, \alpha) - \int f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (1.4)$$

$$\int f d\alpha - s(P_2, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (1.5)$$

Nós tomamos P como sendo um refinamento comum de P_1 e P_2 . Então, o **Lema 3**, junto com (1.4) e (1.5) nos mostra que

$$S(P, f, \alpha) \leq S(P_1, f, \alpha) \leq \int f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \leq s(P_2, f, \alpha) + \varepsilon \leq s(P, f, \alpha) + \varepsilon,$$

logo a equação (1.3) é válida para esta partição. ■

Exemplo 5. Sejam $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ e $f(x) = x^2$, definida em $[0, 1]$.

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, mostremos que existe uma partição P de $[0, 1]$ como no **Teorema 4**. Considere

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq \cdots \leq x_{2k} = 1,$$

$\Delta x_i = \frac{1}{2k}$, $\forall i$, logo $x_k = k \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$. Precisamos encontrar k . Note que:

$$(i) S(f, P, \alpha) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 [2 - 0] = \frac{1}{2}.$$

$$(ii) s(f, P, \alpha) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)^2 [2 - 0] = 2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k^2}\right].$$

Logo,

$$S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) = \frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2}.$$

Então, se $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$, basta tomarmos k como sendo o menor inteiro positivo maior que

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{4\varepsilon}.$$

No caso em que $\varepsilon > \frac{1}{4}$, $\forall k > 0$ satisfaz. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição P tal que $S(f, P, \alpha) - s(f, P, \alpha) < \varepsilon$ determinado por k . Assim, existe $\int_0^1 f d\alpha = \frac{1}{2}$.

Utilizando o **Teorema 4**, podemos estabelecer algumas propriedades para a integral de Riemann-Stieltjes:

1. Se f_1 e f_2 são R-S integráveis no intervalo $[a, b]$, então:

$f_1 + f_2$ é R-S integrável em relação a α ;

cf_1 e cf_2 são R-S integráveis com relação a α para uma contante c ;

$$\int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha;$$

$$\int_a^b cf d\alpha = c \int_a^b f d\alpha.$$

2. Se $f_1 \leq f_2$ no intervalo $[a, b]$, então $\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha$.

3. Se f é R-S integrável em relação a α no intervalo $[a, b]$ e $a < c < b$ então:

f é R-S integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$;

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha.$$

4. Se f é uma aplicação R-S integrável em respeito a α no intervalo fechado $[a, b]$ e se $|f(x)| \leq M$ em $[a, b]$, então $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq M [\alpha(b) - \alpha(a)]$.

5. Se f é R-S integrável em relação a α_1 e α_2 , então:

f é R-S integrável em relação a $(\alpha_1 + \alpha_2)$;

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.$$

6. Se f é R-S integrável em relação a α e c é uma contante positiva, então:

f é R-S integrável em relação a $c\alpha$;

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha.$$

7. Se $a < s < b$, f é limitada em $[a, b]$, f é contínua em s e $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Então $\int_a^b f d\alpha = f(s)$.

A demonstração de tais propriedades podem ser encontradas em [1, pg. 128].

2 O dual de $C([a, b])$.

Em espaços vetoriais de dimensão finita V sabemos como caracterizar o espaço dual que é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos $f : V \rightarrow \mathbb{K}$, onde \mathbb{K} é o corpo dos escalares. Em particular se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V então $\{f_1, \dots, f_n\}$ onde

$$f_j(v) = \langle v, v_j \rangle, \text{ com } j = 1, 2, \dots, n$$

é base do dual. Entretanto, em espaços de dimensão finita isso pode não ocorrer, para obtermos a caracterização dos funcionais contínuos em $C([a, b])$, é necessário considerarmos o seguinte resultado:

Teorema 6. *Se f é contínua sobre o intervalo $[a, b]$ então f é R-S integrável em relação a α em $[a, b]$.*

Prova: Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Escolhamos $\eta > 0$ tal que $[\alpha(b) - \alpha(a)]\eta < \varepsilon$. O fato de f ser contínua sobre um compacto nos dá que f é uniformemente contínua sobre $[a, b]$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$x, t \in [a, b] \text{ e } |x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \eta.$$

Se P é alguma partição de $[a, b]$ de tal forma que $\Delta x_i < \delta$, $\forall i$, então a equação acima implica que

$$|f(x) - f(t)| \leq M_i - m_i \leq \eta$$

pois $M_i - m_i = \sup\{|f(x) - f(t)|\}$, onde $x, t \in [x_{i-1}, x_i]$ e ainda

$$\begin{aligned} S(P, f, \alpha) - s(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^n \eta \Delta\alpha_i = \\ &= \eta \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = \eta [\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo **Teorema 4** segue que f é R-S integrável. ■

Logo, a função que associa cada $f \in C([a, b])$ à sua integral de Stieltjes, define um funcional linear contínuo para toda α limitada e crescente em $[a, b]$.

De fato, chame T a aplicação $T : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ onde $T(f) = \int_a^b f d\alpha$,

(i) Linearidade:

$$\begin{aligned} T(kf + g) &= \int_a^b (kf + g) d\alpha = k \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha = \\ &= kT(f) + T(g), \quad \forall f, g \in C([a, b]), \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Continuidade: Para cada $f \in (C([a, b]), \|\cdot\|_0)$ (norma do sup), pelo **Teorema 6** f é R-S integrável com respeito a α , logo (1.1) = (1.2), e como α é limitada, $|\alpha(x)| \leq M_\alpha, \forall x \in [a, b]$. Assim

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n M_i (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \right| \leq \|f\| \left| \sum_{i=1}^n (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \right| \leq \\ &= \|f\| 2M_\alpha = c\|f\| \Rightarrow \left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq c\|f\|, \end{aligned}$$

isto é, $|T(f)| \leq c\|f\|$.

Teorema 7 (Hahn-Banach). *Seja E um espaço vetorial real e p uma função definida sobre E tal que p satisfaz $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ e $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$; seja E_0 um subespaço vetorial de E e seja g_0 uma forma linear definida sobre E_0 e tal que $g_0(y) \leq p(y)$ para todo $y \in E_0$. Então existe uma forma linear g definida sobre E , prolongando g_0 e tal que $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Prova: A prova deste resultado pode ser encontrada em [2, pg. 176]. ■

Corolário 8. *Seja E um espaço normado, então toda forma linear contínua f_0 definida sobre um subespaço E_0 de E pode ser prolongada a uma forma linear contínua f definida em E e tal que $\|f\| = \|f_0\|$.*

Prova: A prova deste resultado pode ser encontrada em [2, pg. 182]. ■

O resultado abaixo mostra como é a expressão de um elemento do dual de $C([a, b])$.

Teorema 9 (Riesz). *Dado T no espaço dual de $C([a, b])$, existe uma função α de variação limitada em $[a, b]$ tal que para todo $x \in C([a, b])$ tem-se $T(x) = \int_a^b x(t)d\alpha(t)$ e a variação de α é igual a $\|T\|$.*

Prova: Indiquemos por $B([a, b])$ o espaço vetorial de todas as funções limitadas definidas no intervalo $[a, b]$; munimos este espaço com a norma

$$x \in B([a, b]) \mapsto \|x\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

Pelo **Corolário 8** do Teorema de Hahn-Banach podemos estender T a um funcional linear contínuo em $B([a, b])$ e que tenha ainda a mesma norma que T ; indiquemos por T este funcional estendido.

Para todo $s \in [a, b]$ vamos agora definir uma função $x_s \in B([a, b])$: $x_s = 0$ e para $a < s \leq b$ definimos

$$x_s(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq s \\ 0, & s < t \leq b \end{cases}.$$

Para todo $t \in [a, b]$ seja $\alpha(t) = T(x_t)$, vamos mostrar que α é de variação limitada em $[a, b]$, que para todo $x \in C([a, b])$ temos $T(x) = \int_a^b x(t)d\alpha(t)$ e que a variação de α , denotada por $V[\alpha]$, é igual a $\|T\|$.

Seja $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a, b]$, temos

$$\begin{aligned} V_n[\alpha] &= \sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n [T(x_{t_i}) - T(x_{t_{i-1}})] = \\ &= T\left(\sum_{i=1}^n (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\right) = T(\tilde{\alpha}_n) \leq \|T\| \cdot \|\tilde{\alpha}_n\| \leq \|T\|, \end{aligned}$$

pois $|\tilde{\alpha}_n(t)| \leq 1$ para todo $t \in [a, b]$ onde $\tilde{\alpha}_n(t) = \sum_{i=1}^n (x_{t_i}(t) - x_{t_{i-1}}(t))$. Daí segue que $V[\alpha] \leq \|T\|$ e portanto α tem variação limitada.

Dado $x \in C([a, b])$ sabemos por um lado que

$$\sum_{i=1}^n x(\bar{t}_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})], \quad \bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i],$$

tende para $\int_a^b x(t)d\alpha(t)$ quando $n \rightarrow \infty$ e por outro lado

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x(\bar{t}_i)[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] &= \sum_{i=1}^n x(\bar{t}_i)[T(x_{t_i}) - T(x_{t_{i-1}})] = \\ &= T\left(\sum_{i=1}^n x(\bar{t}_i)[x_{t_i} - x_{t_{i-1}}]\right) = T(x_n), \end{aligned}$$

onde

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n x(\bar{t}_i)[x_{t_i}(t) - x_{t_{i-1}}(t)],$$

e temos que x_n tende uniformemente (isto é, na norma de $B([a, b])$) para x quando n tende para infinito, pois, x sendo uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para $t', t'' \in [a, b]$ com $|t' - t''| < \delta$ temos $|x(t') - x(t'')| < \varepsilon$, então para toda partição P com $\Delta t_i < \delta$ temos $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [a, b]$. Portanto, segue da continuidade de T que $T(x_n)$ tende para $T(x)$. ■

Abstract: The purpose of this work is to introduce the Riemann–Stieltjes Integral, investigate some of their properties and relate it to the Riemann Integral. Furthermore, to show their importance to characterize the continuous linear functional on $C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ contínua}\}$.

Keywords: Riemann–Stieltjes Integral; Dual Space; Functional Analysis.

Referências Bibliográficas

- [1] Rudin, W.; *Principle of Mathematical Analysis*, third edition, Mc Graw - Hill, 1976.

- [2] Hönig, C.S.; *Análise Funcional e Aplicações*, Publicação do IME-USP, 1970.
- [3] Nowosad, P.; *Introdução à Análise Funcional*, Textos de Matemática, número 18, Instituto de Matemática, UFPE, 1969.
- [4] Lima, E.L.; *Curso de Análise*, vols. 1 e 2, IMPA, CNPq, Projeto Euclides, 1981.
- [5] Bartle, R.G.; *The elements of real analysis*, Wiley Internacional Edition
- [6] Bachman, G., Narici, L.; *Functional Analysis*, Academic Press, Inc. New York, 1966.

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA – BICMAT

Orientação aos autores

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem \LaTeX , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat, assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.

