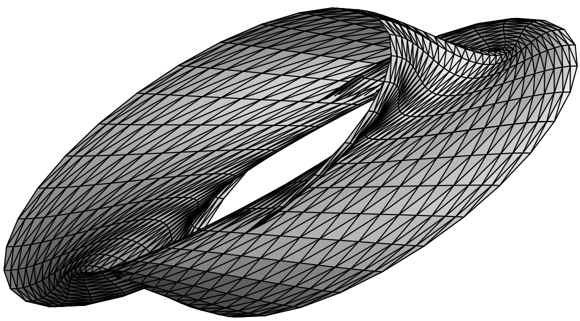
ISSN 1980-024X

Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat



Volume X
Outubro de 2013
Departamento de Matemática
IGCE – Rio Claro

unesp

ISSN 1980-024X

Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat

Realização

Conselho de Curso de Graduação em Matemática

Departamento de Matemática

IGCE – Unesp – Rio Claro

Editorial

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de iniciação científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE – Unesp – Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat, com ISSN 1980-024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de iniciação científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este número estará disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço

`www.rc.unesp.br/igce/matematica`

SUMÁRIO

Sequências Exatas e o Lema dos Cinco

Alex Melges Barbosa[1]
Orientador(a): Prof. Dr. João Peres Vieira

Resumo: Neste trabalho apresentaremos alguns resultados sobre Sequências Exatas e provaremos o Lema dos Cinco.

Palavras-chave: Sequência Exata; Lema dos Cinco

1 Sequências Exatas

Definição 1. Sejam A_1, A_2 e A_3 grupos e ϕ_1 e ϕ_2 homomorfismos formando a sequência $A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} A_3$. Esta sequência é dita exata se $Im(\phi_1) = Ker(\phi_2)$.

Observe que a definição acima pode ser compreendida como duas afirmações, a saber:

- $Im(\phi_1) \subset Ker(\phi_2)$, ou equivalentemente, para qualquer $x \in A_1$, $\phi_2(\phi_1(x)) = 0$, isto é, $\phi_2 \circ \phi_1 = 0$.
- $Ker(\phi_2) \subset Im(\phi_1)$, ou equivalentemente, para qualquer $y \in A_2$, com $\phi_2(y) = 0$, existe $x \in A_1$ tal que $\phi_1(x) = y$.

Uma sequência de grupos e homomorfismos é dita exata se quaisquer dois homomorfismos consecutivos da sequência satisfazem as condições acima. Neste caso, a afirmação acima pode ser expressa, por exemplo, dizendo-se que a sequência é exata em A_2.

Exemplo 2. a) A sequência $\{0\} \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\phi} X$ é exata se, e somente se, $Ker(\phi) = Im(f) = \{0\}$ se, e somente se, ϕ é injetora.

b) A sequência $A \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{f} \{0\}$ é exata se, e somente se, $Im(\phi) = Ker(f) = X$ se, e somente se, ϕ é sobrejetora.

[1] Bolsista FAPESP–Processo 2013/04571–2

c) A sequência $\{0\} \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{g} \{0\}$ é exata se, e somente se, é exata em X e em A se, e somente se, ϕ é bijetora, pois ϕ é injetora e sobrejetora pelos itens $a)$ e $b)$, respectivamente.

Definição 3. Sejam A e B grupos abelianos. Então a soma direta entre A e B é o grupo abeliano $A \times B$ com a operação $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $\forall (a, b), (c, d) \in A \times B$. Denotaremos a soma direta entre A e B por $A \oplus B$.

Teorema 4. *Dados a sequência exata* $P \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\gamma} S \longrightarrow \{0\}$ *e o homomorfismo* $\delta : S \to R$ *com* $\gamma \circ \delta = 1_S$*, então a sequência* $P \xrightarrow{\{\alpha,0\}} Q \oplus S \xrightarrow{(\beta,\delta)} R \longrightarrow \{0\}$ *é exata.*

Prova: *i)* $Im(\{\alpha, 0\}) \subset Ker(\beta, \delta)$. De fato, $\forall p \in P$, $(\beta, \delta)\{\alpha, 0\}(p) = (\beta, \delta)(\alpha(p), 0) = \beta \circ \alpha(p) = 0$.

ii) $Ker(\beta, \delta) \subset Im(\{\alpha, 0\})$.De fato, $(q, s) \in Ker(\beta, \delta) \Rightarrow (\beta, \delta)(q, s) = 0 \Rightarrow \gamma(\beta, \delta)(q, s) = \gamma(0) \Rightarrow 0 = \gamma(\beta(q) + \delta(s)) = \gamma \circ \beta(q) + \gamma \circ \delta(s) = 0 + 1_S(s) = s \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \beta(q) = 0 \Rightarrow (q, 0) = (\alpha(p), 0) = \{\alpha, 0\}(p)$, para algum $p \in P \Rightarrow (q, s) = (q, 0) \in Im(\{\alpha, 0\})$. Logo, $Im(\{\alpha, 0\}) = Ker(\beta, \delta)$.

iii) Mostremos agora que (β, δ) é sobrejetora. Dado $r \in R$, considere $s = \gamma(r)$, então $r - \delta(s) \in Ker(\gamma)$, pois $\gamma(r - \delta(s)) = \gamma(r) - \gamma \circ \delta(s) = s - 1_S(s) = s - s = 0$. Mas $Ker(\gamma) = Im(\beta)$, logo existe $q \in Q$ tal que $\beta(q) = r - \delta(s)$. Assim, $(q, s) \in Q \oplus S$ e $(\beta, \delta)(q, s) = \beta(q) + \delta(s) = r - \delta(s) + \delta(s) = r$. Portanto, (β, δ) é sobrejetora.

Portanto, a sequência $P \xrightarrow{\{\alpha,0\}} Q \oplus S \xrightarrow{(\beta,\delta)} R \longrightarrow \{0\}$ é exata. ■

Corolário 5. *Dados a sequência exata* $\{0\} \longrightarrow Q \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\gamma} S \longrightarrow \{0\}$ *e o homomorfismo* $\delta : S \to R$ *com* $\gamma \circ \delta = 1_S$*, então a função* $(\beta, \delta) : Q \oplus S \to R$ *é um isomorfismo.*

Prova: Ao tomar $P = \{0\}$ no Teorema 4, temos que $\{0\} \longrightarrow Q \oplus S \xrightarrow{(\beta,\delta)} R \longrightarrow \{0\}$ é uma sequência exata. Com isso, (β, δ) é uma bijeção e, consequentemente, um isomorfismo. ■

Quando existir um homomorfismo δ de acordo com as condições do Corolário 5, dizemos que a sequência exata cinde.

2 Lema dos Cinco

Considere, como hipótese para os lemas a seguir, que:

- A_i e B_i são grupos abelianos e α_j, β_j e ϕ_i são homomorfismos, para $0 \leq i \leq 4$ e $0 \leq j \leq 3$.
- o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 \\ \phi_0 \downarrow & & \phi_1 \downarrow & & \phi_2 \downarrow & & \phi_3 \downarrow & & \phi_4 \downarrow \\ B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 \end{array}$$

  é comutativo, isto é, comuta em cada quadrado.
- as sequências horizontais do diagrama acima são exatas.

Antes de provarmos o Lema dos Cinco, precisaremos dos seguintes resultados:

Lema 6. *Se ϕ_0 é um epimorfismo e ϕ_3 é um monomorfismo, então $Ker(\phi_2) = \alpha_1(Ker(\phi_1))$.*

Prova: $i)$ $\alpha_1(Ker(\phi_1)) \subset Ker(\phi_2)$

Seja $x \in Ker(\phi_1)$, isto é, $\phi_1(x) = 0$. Então, $\phi_2(\alpha_1(x)) = \phi_2 \circ \alpha_1(x) = \beta_1 \circ \phi_1(x) = \beta_1(\phi_1(x)) = \beta_1(0) = 0$. Logo, $\alpha_1(x) \in Ker(\phi_2)$.

$ii)$ $Ker(\phi_2) \subset \alpha_1(Ker(\phi_1))$

Seja $x \in Ker(\phi_2)$, isto é, $\phi_2(x) = 0$. Então, $\beta_2(\phi_2(x)) = \beta_2(0) = 0$. Logo, $\phi_3 \circ \alpha_2(x) = \beta_2 \circ \phi_2(x) = 0$. Assim, $\alpha_2(x) \in Ker(\phi_3) = \{0\}$, pois ϕ_3 é injetora. Então, $\alpha_2(x) = 0$, ou seja, $x \in Ker(\alpha_2) =$

$Im(\alpha_1)$, pois a sequência é exata em A_2. Logo, existe $y \in A_1$ tal que $\alpha_1(y) = x$. Portanto, $\phi_2(\alpha_1(y)) = \phi_2(x) = 0$.

Então, $\beta_1 \circ \phi_1(y) = \phi_2 \circ \alpha_1(y) = 0$, ou seja, $\phi_1(y) \in Ker(\beta_1) = Im(\beta_0)$, pois a sequência é exata em B_1. Assim, existe $z \in B_0$ tal que $\beta_0(z) = \phi_1(y)$. Como ϕ_0 é sobrejetora, existe $w \in A_0$ tal que $\phi_0(w) = z$. Então, $\beta_0 \circ \phi_0(w) = \phi_1(w)$, ou seja, $\phi_1 \circ \alpha_0(w) = \phi_1(y)$.

Assim, $\phi_1(-\alpha_0(w) + y) = 0$, isto é, $-\alpha_0(w) + y \in Ker(\phi_1)$. Mas, $\alpha_1(-\alpha_0(w)+y) = -\alpha_1(\alpha_0(w))+\alpha_1(y) = 0+x = x$, pois a sequência é exata em A_1. Portanto, $x \in \alpha_1(Ker(\phi_1))$. ∎

Sendo ϕ um homomorfismo de grupos, denotaremos $\phi^{\vdash}(G)$ a imagem inversa de G por ϕ.

Lema 7. *Seja ϕ_1 um epimorfismo e ϕ_4 um monomorfismo. Então, $\beta_2^{\vdash}(Im(\phi_3)) = Im(\phi_2)$.*

Prova: *i)* $Im(\phi_2) \subset \beta_2^{\vdash}(Im(\phi_3))$

Seja $x \in Im(\phi_2)$, isto é, existe $y \in A_2$ tal que $\phi_2(y) = x$. Assim, $\beta_2(\phi_2(y)) = \beta_2(x)$, isto é, $\phi_3(\alpha_2(y)) = \beta_2(x)$. Logo, $\beta_2(x) \in Im(\phi_3)$. Portanto, $x \in \beta_2^{\vdash}(Im(\phi_3))$.

ii) $\beta_2^{\vdash}(Im(\phi_3)) \subset Im(\phi_2)$

Seja $x \in \beta_2^{\vdash}(Im(\phi_3))$, isto é, $\beta_2(x) \in Im(\phi_3)$, ou seja, existe $y \in A_3$ tal que $\phi_3(y) = \beta_2(x)$. Logo, $\phi_4(\alpha_3(y)) = \beta_3(\phi_3(y)) = \beta_3(\beta_2(x)) = 0$, pois a sequência é exata em B_3. Assim, $\alpha_3(y) \in Ker(\phi_4) = \{0\}$, pois ϕ_4 é injetora. Então, $\alpha_3(y) = 0$, ou seja, $y \in Ker(\alpha_3) = Im(\alpha_2)$, pois a sequência é exata em A_3. Portanto, existe $z \in A_2$ tal que $\alpha_2(z) = y$.

Assim, $\phi_3(\alpha_2(z)) = \phi_3(y)$, isto é, $\beta_2(\phi_2(z)) = \phi_3(y) = \beta_2(x)$. Então, $\beta_2(x - \phi_2(z)) = 0$, ou seja, $(x - \phi_2(z)) \in Ker(\beta_2) = Im(\beta_1)$, pois a sequência é exata em B_2. Logo, existe $w \in B_1$ tal que $\beta_1(w) = x - \phi_2(z)$.

Como ϕ_1 é sobrejetora, existe $v \in A_1$ tal que $\phi_1(v) = w$. Assim, $\beta_1(\phi_1(v)) = x - \phi_2(z)$, isto é, $\phi_2(\alpha_1(v)) = x - \phi_2(z)$. Portanto, $x = \phi_2(\alpha_1(v) + z)$, ou seja, $x \in Im(\phi_2)$. ■

Finalmente, provemos o

Lema 8 (Lema dos Cinco). *Se ϕ_0, ϕ_1, ϕ_3 e ϕ_4 são isomorfismos, então ϕ_2 também será um isomorfismo.*

Prova: Como, em particular, ϕ_0 é um epimorfismo e ϕ_3 é um monomorfismo, segue pelo Lema 6 que $Ker(\phi_2) = \alpha_1(Ker(\phi_1)) = \alpha_1(\{0\}) = 0$, pois ϕ_1 é injetora.

Como, em particular, ϕ_1 é um epimorfismo e ϕ_4 é um monomorfismo, segue pelo Lema 7 que $Im(\phi_2) = \beta_2^{\vdash}(Im(\phi_3)) = \beta_2^{\vdash}(B_3) = B_2$, pois ϕ_3 é sobrejetora.

Portanto, ϕ_2 é um isomorfismo. ■

Agradecimentos: Agadeço ao meu orientador, Prof. Dr. João Peres Vieira, pelo apoio e paciência oferecidos neste trabalho e ao auxílio financeiro da FAPESP.

Abstract: In this paper we present some results on Exact sequences and prove Five lemma.

Keywords: Exact sequence; Five lemma

Referências Bibliográficas

[1] Vick, J.W., *Homology Theory*, Academic Press, New York-London, 1973.

[2] Wall, C.T.C. - *A Geometric Introduction to Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972

Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicação em Equações Diferenciais

Cristiano dos Santos[1]
Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Neste trabalho apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, e constataremos, através de uma aplicação, a importância da teoria de Análise Funcional na resolução de problemas de outras áreas da Matemática.
Palavras-chave: Existência e unicidade, ponto fixo, equações diferenciais.

1 Um pouco de História

Stefan Banach (1892–1945)

Banach frequentou a escola primária em Cracóvia, deixando a escola em 1902 para iniciar o ensino secundário no Ginásio. Por uma feliz coincidência, um dos alunos da classe de Banach foi Witold Wilkosz o qual se tornou um professor de matemática. Ao deixar a Ginásio Banach e Wilkosz queriam estudar matemática, mas ambos sentiram que nada de novo poderia ser descoberto em matemática, cada um escolheu trabalhar em um assunto que não seja matemática. Banach escolheu estudar engenharia, Wilkosz escolheu línguas orientais.

[1]Bolsista Fapesp, Processo: 2012/15162–3

Banach deixou Cracóvia e foi para Lvov, onde matriculou-se na Faculdade de Engenharia da Universidade Técnica de Lvov. É quase certo que Banach, sem qualquer apoio financeiro, teve que se sustentar dando aulas. Por isso ele levou mais tempo para concluir o curso do que era normal em 1914.

Um acontecimento fortuito ocorreu em 1916, que teve um grande impacto na vida de Banach. Steinhaus, que tinha vindo a realizar o serviço militar, estava prestes a assumir um cargo na Universidade Jan Kazimierz de Lvov. No entanto, ele estava morando em Cracóvia em 1916, à espera de assumir o compromisso. Ele andava pelas ruas de Cracóvia durante a noite e, como ele relatou em suas memórias: - *Durante uma tal caminhada ouvi a expressão "medida de Lebesgue". Aproximei-me do banco do parque e me apresentei aos dois jovens aprendizes da matemática. Disseram-me que tinha outro companheiro conhecido pelo nome de Witold Wilkosz, que foi extravagantemente elogiado. Os jovens foram Stefan Banach e Otto Nikodym. A partir de então nos encontramos em uma base regular, e ... decidimos estabelecer uma sociedade matemática.*

Steinhaus mostrou a Banach um problema que ele estava trabalhando, sem sucesso. Depois de alguns dias Banach teve a idéia principal para o contra-exemplo necessário, e Steinhaus e Banach escreveram um documento conjunto. A partir do momento que ele produziu estes primeiros resultados com Steinhaus, Banach começou a produzir trabalhos importantes de matemática em uma taxa rápida. Claro que é impossível dizer se, sem o encontro casual com Steinhaus, Banach teria seguido a rota de pesquisa em matemática. Em 1924 Banach foi promovido a professor titular e passou o ano letivo de 1924–1925, em Paris. A maneira que trabalhou Banach foi pouco convencional. Ele gostava de fazer matemática com seus colegas nos cafés de Lvov. Ele também escreveu textos de aritmética, geometria e álgebra para escolas de ensino médio.

A ocupação nazista de Lvov em junho de 1941 fez com que Banach vivesse sob condições muito difíceis. Ele foi preso sob suspeita de tráfico de moeda alemã, mas liberado depois de algumas semanas. Ele sobreviveu a um período em que os acadêmicos poloneses foram assassinados, seu orientador de doutorado Lomnicki morreu na trágica noite de 03 de julho de 1941, quando muitos massacres ocorreram. Banach planejava ir a Cracóvia depois da guerra para ocupar um cargo na Universidade Jagiellonian mas ele morreu em Lvov, em 1945, de câncer de pulmão.

2 Definições e Resultados

Definição 1. Uma métrica em um conjunto M é uma função definida em $M \times M$ com imagem em $\mathbb{R}$ tal que $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a **distância** de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in M$:

d_1 - $d(x, x) = 0$.

d_2 - Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$.

d_3 - $d(x, y) = d(y, x)$.

d_4 - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2. Um **espaço métrico** é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.

Exemplo 3 (A métrica "zero-um"). Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.

Definição 4. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M chama-se uma **sequência de Cauchy** quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definição 5. Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente (em M).

Definição 6. Uma norma em V é uma função:

$$x \in V \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}$$

que a cada elemento de V associa a um número real, com as seguintes propriedades:

N1 - $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in V$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$.

N2 - $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \ \forall x \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

N3 - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in V$.

Em particular se $\alpha = -1$ em N_2 temos $\|x\| = \| - x\| \ \forall x \in V$.

Definição 7. Seja V um espaço vetorial e $\| \ \|$ uma norma qualquer. O par $(V, \| \ \|)$ é dito um espaço normado.

Definição 8. Um espaço vetorial normado $(E, \| \ \|)$ é dito de Banach se, for completo com a métrica $d(x, y) = \|x - y\|, \ \forall x, y \in E$.

No próximo exemplo utilizaremos as desigualdades de Hölder e Minkowski, cujas demonstrações podem ser encontradas na referência [3].

Proposição 9 (A Desigualdade de Hölder). *Sejam* $1 \leq p, \ p' \leq \infty$, *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Então:*

(a) Dados $x, y \in \mathbb{C}^n$, *temos* $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$, *isto é,*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p'} \right]^{\frac{1}{p'}}$$

quando $1 < p < \infty$ *e*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \sup_{1 \leq j \leq n} |y_j|$$

quando $p = 1$ *ou* $p = \infty$.

(b) Dados $f, g \in C([a,b], \mathbb{C}^n)$, temos $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$, isto é,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}}$$

quando $1 < p < \infty$ e

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \cdot \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$

quando $p = 1$ ou $p = \infty$.

Proposição 10 (A Desigualdade de Minkowski). *Sejam $1 \leq p,\ p' \leq \infty$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Então:*

(a) Para quaisquer x e y em $\mathbb{C}^n$ temos: $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, isto é,

$$\left[\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

(b) Para quaisquer $f, g \in C([a,b], \mathbb{C})$, temos: $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, isto é,

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |g(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Exemplo 11. Seja $p \geq 1$ um número real fixo. Por definição cada elemento de ℓ^p é uma sequência $x = (\eta_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ de números reais ou complexos cuja soma abaixo converge,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p = M < \infty.$$

Mostraremos a seguir que ℓ^p é um espaço vetorial normado e de Banach.

Vetorial Normado

Definiremos agora, as operações no espaço ℓ^p.

$$+ : \ell^p \times \ell^p \longrightarrow \ell^p$$

$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

onde $x = (\eta_1, \ldots, \eta_k, \ldots)$, $y = (\mu_1, \ldots, \mu_k, \ldots)$ e

$$x + y = (\eta_1 + \mu_1, \ldots, \eta_k + \mu_k, \ldots) = (\eta_k + \mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

Observe que a operação está bem definida,

$$\sum_{k=1}^{n} |\eta_k + \mu_k|^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p = \left[M^{\frac{1}{p}} + N^{\frac{1}{p}} \right]^p < \infty.$$

Assim, $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\eta_k + \mu_k|^p$ é crescente e limitada, portanto convergente e $(\eta_k + \mu_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$.

$$\cdot : \mathbb{C} \times \ell^p \longrightarrow \ell^p$$

$$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$$

onde $x = (\eta_1, \ldots, \eta_k, \ldots)$ e

$$(\alpha x) = (\alpha \eta_1, \ldots, \alpha \eta_k, \ldots) = (\alpha \eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

Observe que a operação está bem definida,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha \eta_k|^p = |\alpha|^p \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p = |\alpha|^p M < \infty$$

e portanto, $(\alpha \eta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$.

A norma em ℓ^p é definida por:

$$\|x\|_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

De fato, é norma, pois

(i) $\|x\|_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \geq 0$ e

$$\|x\|_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |\eta_k| = 0 \Leftrightarrow \eta_k = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

(ii)

$$\|\alpha x\|_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha\eta_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[|\alpha|^p \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|x\|_p.$$

(iii) Pela desigualdade de Minkowski, não é difícil provar que

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Portanto, ℓ^p é um espaço vetorial normado.

Banach

Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qualquer sequência de Cauchy no espaço ℓ^p, onde $x_m = (\xi_j^{(m)})_{j\in\mathbb{N}}$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $m, n > n_0$

$$\|x_m - x_n\|_p = \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, $|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| \leq \|x_m - x_n\|_p$ e assim, para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $m, n > n_0$ implica

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \varepsilon.$$

Assim, para cada j fixo, a sequência $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \ldots)$ é de Cauchy no corpo $\mathbb{K}$, logo cada sequência $\xi_j^{(m)}$ desta nova sequência converge para um elemento ξ_j quando $m \to \infty$. Considere então $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, basta mostrar que $x \in \ell^p$ e $x_m \to x$.

Da equação (1.1) temos que para todo $m, n > n_0$

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)} \right|^p < \varepsilon^p \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $n \to \infty$, para $m > n_0$ segue que

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j \right|^p \leq \varepsilon^p, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $k \to \infty$, tem-se para todo $m > n_0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j \right|^p \leq \varepsilon^p.$$

Isto mostra que $x_m - x = (\xi_j^{(m)} - \xi_j) \in \ell^p$. Segue então da desigualdade de Minkowski que,

$$\|x\|_p = \|x - x_m + x_m\|_p \leq \|x - x_m\|_p + \|x_m\|_p < \infty.$$

Portanto, $x \in \ell^p$ e $x_m \to x$.

Proposição 12. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Prova: Seja $F \subset M$ fechado, com M completo. Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em F, existe $\lim x_n = a \in M$. Como F é fechado em M, tem-se $a \in F$. Logo F é completo.

Por outro lado, se $M \subset N$ é subespaço completo de um espaço métrico N, dada a sequência de pontos $x_n \in M$, com $\lim x_n = a \in N$, a sequência (x_n) é de Cauchy, pois é convergente. Logo existe $b \in M$ tal que $\lim x_n = b$. Pela unicidade do limite, tem-se $a = b$ e portanto M é fechado em N. ∎

Proposição 13. *Se F é de Banach então o espaço $B(X, F)$ das funções limitadas definidas em X com imagem em F, com a norma do* sup, *é um espaço de Banach.*

Prova: Se (f_k) é de Cauchy em $B(X,F)$ então, para cada ε, existe k_ε tal que

$$p,q > k_\varepsilon \Longrightarrow \|f_p - f_q\| < \varepsilon, \quad \text{isto é,} \quad \sup_{x\in X} \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Então para cada $x_0 \in X$

$$p,q > k_\varepsilon \Longrightarrow \|f_p(x_0) - f_q(x_0)\| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Assim, $(f_k(x_0))$ é de Cauchy em F, existindo, por hipótese, $\lim f_k(x_0) \in F$, pois F é completo. Defina a função $f : X \longrightarrow F$ pontualmente por $f(x) = \lim\limits_k f_k(x)$.

Para provar que $f \in B(X,F)$, basta mostrar f é limite uniforme e é limitada. Fazendo $q \to \infty$ em (1.3), temos: $\|f_p(x_0) - f(x)\| \leq \varepsilon$ para todo $x_0 \in X$ e $p > k_\varepsilon$. O que mostra que $f_k \to f$ uniformemente.

Em particular, para $\varepsilon = 1$ existem k_ε e $p = 2k_\varepsilon$ tais que,

$$\|f_{2k_\varepsilon} - f\| \leq 1 \Longrightarrow \|f - f_{2k_\varepsilon}\| \leq 1 \Longrightarrow \|f\| - \|f_{2k_\varepsilon}\| \leq \|f - f_{2k_\varepsilon}\| \leq 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|f\| \leq 1 + \|f_{2k_\varepsilon}\| \Longrightarrow \|f(x)\| \leq 1 + \|f_{2k_\varepsilon}(x)\|, \qquad \forall x \in X.$$

O que prova que f é limitada. ■

Proposição 14. *Sejam E e F espaços normados, F de Banach. Então $C(X,F)$, o espaço das funções contínuas definidas em X com imagem em F, com a norma do* sup*, é um subespaço fechado de $B(X,F)$, qualquer que seja $X \subset E$.*

Prova: Mostremos que o limite uniforme f de uma sequência (f_k) de funções contínuas é sempre uma função contínua em cada ponto $a \in X$.

Dado ε, existe k_ε tal que

$$k \geq k_\varepsilon \Longrightarrow \|f_k - f\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

E, sendo f_{k_ε} contínua, existe δ_ε tal que

$$\|x - a\| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|f_{k_\varepsilon}(x) - f_{k_\varepsilon}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Logo, se $\|x-a\| < \delta_\varepsilon$, então

$$\|f(x)-f(a)\| = \|f(x)-f_{k_\varepsilon}(x)+f_{k_\varepsilon}(a)-f(a)+f_{k_\varepsilon}(x)-f_{k_\varepsilon}(a)\| \leq$$

$$\leq \|f(x)-f_{k_\varepsilon}(x)\| + \|f_{k_\varepsilon}(a)-f(a)\| + \|f_{k_\varepsilon}(x)-f_{k_\varepsilon}(a)\| \leq$$

$$\leq \|f-f_{k_\varepsilon}\| + \|f_{k_\varepsilon}-f\| + \|f_{k_\varepsilon}(x)-f_{k_\varepsilon}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em a. ∎

Corolário 15. *Se F é um espaço de Banach, então $C(X,F)$ também o é.*

3 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Definição 16. Sejam $(M,d),(N,\tilde{d})$ dois espaços métricos. Uma aplicação $f: M \longrightarrow N$ chama-se uma contração quando existe uma constante real α, com $0<\alpha<1$, tal que $\tilde{d}(f(x),f(y)) \leq \alpha d(x,y) \quad \forall x,y \in M$.

Observação 17. Toda contração é uniformemente contínua.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ basta considerar $\delta = \varepsilon/\alpha$, Assim, se $d(x,y) < \delta$ para $x,y \in M$, então

$$\tilde{d}(f(x),f(y)) \leq \alpha d(x,y) < \alpha\delta = \alpha\frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon.$$

Definição 18. Sejam X um conjunto não vazio e $f: X \longrightarrow X$ uma aplicação. Um ponto $x \in X$ é chamado ponto fixo de f se $f(x)=x$.

Teorema 19 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Sejam $X \neq \emptyset$ um espaço métrico completo e $T: X \longrightarrow X$ uma contração. Então T tem um único ponto fixo.*

Prova: Escolha algum $x_0 \in X$ e defina a "sequência iterativa" (x_n) por:

$$x_0, \quad x_1 = T(x_0), \quad x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \quad \ldots, \quad x_n = T^n(x_0), \ldots$$

Mostremos que (x_n) é de Cauchy. De fato, como T é uma contração segue que existe $\alpha \in]0,1[$ tal que:

$$d(x_{m+1},x_m) = d(T(x_m),T(x_{m-1})) \leq \alpha d(x_m,x_{m-1}) =$$

$$= \alpha d(T(x_{m-1}), T(x_{m-2})) \leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \leq \ldots \leq \alpha^m d(x_1, x_0).$$

Pela desigualdade triangular obtemos para $n > m$,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \leq$$

$$\leq \alpha^m d(x_0, x_1) + \alpha^{m+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{n-1} d(x_0, x_1) =$$

$$= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1),$$

ou seja,

$$d(x_m, x_n) \leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1). \tag{1.4}$$

Logo,

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^m [1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{-m+n-1}] d(x_0, x_1),$$

como $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-m-1} \alpha^j = \frac{1 - \alpha^{n-m-1}}{1 - \alpha}$ (soma dos $n - m - 1$ termos de uma P.G.), tem-se

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^m \frac{(1 - \alpha^{n-m-1})}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).$$

Como $0 < \alpha < 1$ segue que $1 - \alpha^{n-m-1} < 1$, consequentemente,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).$$

Note que, $0 < \alpha < 1$ e $d(x_0, x_1)$ são fixos, assim, para m suficientemente grande e $n > m$, $d(x_m, x_n)$ fica arbitrariamente pequeno. Portanto, (x_n) é de Cauchy. Como X é completo, (x_n) converge, ou seja, $x_n \to x \in X$. Mostremos agora que x é um ponto fixo da aplicação T.

Pela desigualdade triangular e do fato de T ser contração vale,

$$d(x, T(x)) \leq d(x, x_m) + d(x_m, T(x)) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x).$$

Fazendo $m \to \infty$ obtemos

$$d(x, T(x)) \leq 0 \Rightarrow d(x, T(x)) = 0 \Rightarrow T(x) = x.$$

Suponha agora que exista, além de x, outro ponto fixo $\tilde{x}$, isto é, $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$, logo,

$$d(x,\tilde{x}) = d(T(x),T(\tilde{x})) \leq \alpha d(x,\tilde{x}) < d(x,\tilde{x}), \quad \text{pois} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Então

$$d(x,\tilde{x}) = 0 \Rightarrow x = \tilde{x}.$$

Portanto, x é o único ponto fixo da aplicação T, e o teorema está provado. ■

4 Uma Aplicação

Definição 20. Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, a relação $x' = f(t,x)$ é chamada uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Note que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}(t)$. Um problema de valor inicial (PVI) consiste de uma equação diferencial e de uma condição inicial, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. O PVI é descrito por:

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Definição 21. Uma solução para o PVI (1.5) é uma função $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida em algum intervalo I da reta contendo o ponto t_0 e que satisfaz $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $x'(t) = f(t,x(t)), \ \forall t \in I$.

Teorema 22 (Teorema de Picard: Existência e unicidade de soluções). *Seja f uma função contínua no retângulo*

$$R = \{(t,x); |t - t_0| \leq a, \ \|x - x_0\| \leq b\}$$

e, assim, limitada em R. Ou seja, existe $c > 0$ tal que, para todo $(t,x) \in R$, $\|f(t,x)\| \leq c$.

Suponha que f satisfaça a condição de Lipschitz em R com respeito ao segundo argumento, isto é, existe uma constante k tal que para $(t,x), (t,v) \in R$,

$$\|f(t,x) - f(t,v)\| \leq k\|x - v\|. \tag{1.6}$$

Então, ao menos no intervalo fechado $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, onde

$$\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}, \tag{1.7}$$

o problema de valor inicial descrito por (1.5) *apresenta uma única solução.*

Prova: Seja $C(J)$ o espaço métrico das funções contínuas definidas no intervalo $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ com valores em $\mathbb{R}^n$, com a métrica definida por:

$$d(x, y) = \sup_{t \in J} \|x(t) - y(t)\|.$$

Sabemos que $C(J)$ é completo. Seja agora $\widetilde{C}$ um subespaço de $C(J)$ constituído por todas as funções $x \in C(J)$ que satisfazem:

$$\|x(t) - x_0\| \leq c\beta, \forall t \in J. \tag{1.8}$$

Observe que $\widetilde{C}$ é fechado em $C(J)$, logo completo. De fato, seja (x_n) uma sequência convergente em $\widetilde{C}$, ou seja, existe $\tilde{x} \in C(J)$ tal que $x_n \to \tilde{x}$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x_n, \tilde{x}) = \|x_n - \tilde{x}\| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n > n_0.$$

Como $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \widetilde{C}$, tem-se

$$\|x_n(t) - x_0\| \leq c\beta, \quad \forall t \in J, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Como $c\beta$ não depende de t, considerando o supremo sobre todo $t \in J$ segue que:

$$d(x_n, x_0) = \sup_{t \in J} \|x_n(t) - x_0\| \leq c\beta.$$

Resta mostrar que $\tilde{x} \in \widetilde{C}$. Pela desigualdade triangular

$$d(\tilde{x}, x_0) \leq d(\tilde{x}, x_n) + d(x_n, x_0) \leq \varepsilon + c\beta, \text{ para } n > n_0$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtem-se

$$\sup_{t \in J} \|\tilde{x}(t) - x_0\| = d(\tilde{x}, x_0) \leq c\beta,$$

e segue disto que $\tilde{x} \in \widetilde{C}$.

Note que resolver o problema de valor inicial (1.5) é equivalente a resolver a equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad t \in J,$$

cuja demonstração segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

Defina $T : \widetilde{C} \to C$ por

$$(T(x))(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad t \in J. \tag{1.10}$$

Como f e x são funções contínuas, segue que a integral acima existe. Note também que

$$\|(T(x))(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|ds \leq c|t - t_0| \leq c\beta,$$

satisfazendo (1.8), ou seja, T é uma aplicação de $\widetilde{C}$ em si mesmo, portanto $T : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C}$ está bem definida. Além disso, T é uma contração em $\widetilde{C}$. De fato, de (1.6) segue que

$$\|(T(x))(t) - (T(y))(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]ds \right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|ds \leq k \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\|ds \leq$$

$$\leq k|t - t_0| \sup_{s \in J} \|x(s) - y(s)\| \leq k\beta d(x, y), \quad t \in J.$$

Como o lado direito da desigualdade não depende de t, considerando o supremo sobre $t \in J$ à esquerda, resulta que

$$d(T(x), T(y)) \leq \eta d(x, y), \quad \text{onde} \quad \eta = k\beta.$$

De (1.7) tem-se $\eta = k\beta < 1$ e, portanto, T é uma contração em $\widetilde{C}$. Nestas condições, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, T tem um único ponto fixo $x \in \widetilde{C}$, ou seja, uma função x contínua em J satisfazendo $x(t) = (T(x))(t)$ para todo $t \in J$. Logo de (1.10) tem-se:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad t \in J. \tag{1.11}$$

O que corresponde à solução do PVI dado. ∎

Agradecimentos: Agradeço, aos meus professores, à minha querida orientadora Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti pelo apoio e incentivo no trabalho. À agência de fomento FAPESP pelo financiamento do projeto. Aos meus amigos, por 204 motivos, por sentirem um Estranho Amor, por serem Bobos e Gagos, por gostarem de Bolo, Cortes de Dedekind e de algumas músicas e bandas estranhas, tais como, Justin Bieber e Polegar, por saberem que sempre encontro um Calango quando Mijo Gostoso, e principalmente por rirem quando pego meu tapete voador e vou ao encontro da minha linda Jasmine. Por fim, faço um agradecimento especial aos meus familiares e à minha namorada Marxsa por cuidarem, incentivarem e me alegrarem nos momentos que preciso.

Abstract: In this work we introduce the Banach Fixed Point Theorem, and we'll see, through an application, the importance of the functional analysis theory in solving problems in other areas of mathematics.

Keywords: Existence and uniqueness, fixed point, differential equations.

Referências Bibliográficas

[1] Kreysig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley Classics Library, 1989, 688 p.

[2] Hönig, C. S. *Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville*, São Paulo: Edgar Blücher, 1978.

[3] Lima, E. L. *Espaços Métricos.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013, 387 p.

[4] Lima, E. L. *Curso de Análise, v. 1.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981, 432 p.

[5] Robertson, E.; O'Connor, J. *The MacTutor History of Mathematics archive* disponível em: `www-history.mcs.st-andrews.ac.uk`, acessado em 15/07/2013.

Grupo Fundamental e o Teorema de van Kampen

Givanildo Donizeti de Melo[1]

Orientador(a): Prof. Dr. Thiago de Melo

Resumo: Na Topologia Algébrica, a Teoria de Homotopia é muito importante. O grupo fundamental é um dos invariantes topológicos mais simples desta teoria, e este será definido neste trabalho. Apresentaremos também uma forma de calcular tal grupo, utilizando o Teorema de van Kampen.

Palavras-chave: homotopia; laço; grupo fundamental.

1 Introdução

Começaremos definindo homotopia entre funções e classes de homotopia de funções, para falarmos de grupo fundamental. Seja X um espaço topológico, considere a função contínua $f : [0,1] \to X$, que é chamada de caminho em X. Se $f(0) = f(1) = *$, chamaremos este caminho de laço baseado em $*$ (ou laço em $*$). Assim, definiremos o grupo fundamental como o conjunto das classes de homotopia de laços baseados em $*$, que é denotado por $\pi_1(X,*)$.

Mostraremos que $\pi_1(X,*)$ não depende do ponto $*$, quando X for conexo por caminhos. E observaremos que π_1 está "relacionando" os espaço topológicos e as funções contínuas com os grupos e os homomorfismos, respectivamente.

Para o calculo do grupo fundamental, usaremos uma ferramenta analítica que é o Teorema de van Kampen. Aplicaremos este teorema para calcular o grupo fundamental de alguns espaços como por exemplo S^n para $n > 1$.

[1]Bolsista FAPESP, Processo: 2012/21903–6

2 Noções de Homotopia

Para facilitar a notação, denotaremos alguns conjuntos por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\};\\
B^n &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\};\\
B(a; r) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) \leqslant r\};\\
S^{n-1} &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\};\\
I^n &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1\},
\end{aligned}$$

onde $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ para $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < r \in \mathbb{R}$.

Definição 1. Duas funções contínuas $f_0, f_1 : X \to Y$ são ditas homotópicas se existe uma família intermediária de funções $f_t : X \to Y$ juntamente contínua em x e t, isto é, se existe

$$H : X \times I \to Y$$

que é contínua de modo que $H(x, 0) = f_0(x)$ e $H(x, 1) = f_1(x)$.

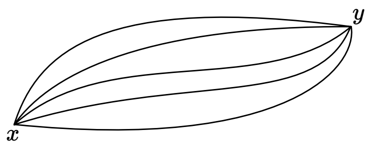
Observação 2. A Função H é chamada homotopia entre f_0 e f_1, e escrevemos $f_0 \sim f_1$ para indicar que f_0 é homotópica a f_1.

Observação 3. Note que $\sim$ é uma relação de equivalência. Assim, podemos falar das classes de homotopia de funções. Seja f uma função contínua, denotamos sua classe de homotopia por $[f]$, que é o conjunto de todas funções que são homotópicas a f. Escrevemos $[X, Y]$ para indicar o conjunto das classes de homotopia das funções de X em Y.

Definição 4. Dado um espaço X e um subespaço A de X, vamos escrever (X, A) para denotar um par de espaços. Uma função contínua do par (X, A) para o par (Y, B) é apenas uma função contínua $f : X \to Y$ com $f(A) \subset B$. Um homeomorfismo de (X, A) para (Y, B) é apenas um homeomorfismo de X para Y tal que A corresponde a B.

Definição 5. Definimos $\pi_1(X,*) := [(I,\{0,1\}),(X,*)]$, isto é, $\pi_1(X,*)$ é o conjunto das classes de homotopia dos caminhos $p : I \to X$ tais que $p(0) = p(1) = *$. Esses caminhos são chamados de laços.

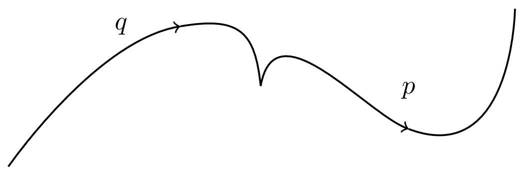
Observação 6. Podemos também definir $\pi_1(X;x,y)$ que é o conjunto das classes de homotopia dos caminhos $p : I \to X$ tal que $p(0) = x$ e $p(1) = y$.



3 O Grupo Fundamental

Na seção anterior definimos $\pi_1(X,*)$, agora definiremos uma operação para este conjunto, que será a composição de dois caminhos, com o objeto de que π_1 tenha uma estrutura de grupo.

Definimos um produto para dois caminhos $q : I \to X$ e $p : I \to X$ tais que $q(1) = p(0)$, obtendo um novo caminho, chamado de caminho justaposto, cujo 'percurso' através de q terá o dobro da velocidade (de $s = 0$ para $s = \frac{1}{2}$), e em seguida, através de p, também com o dobro da velocidade.



Este caminho $p.q$ é definido como:

$$(p.q)(s) = \begin{cases} q(2s), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ p(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Para verificar que este produto está bem definido nas classes de homotopia, suponha

$$Q : q \sim q' \quad \text{e} \quad P : p \sim p'.$$

Assim, obtemos uma homotopia $G : p.q \sim p'.q'$, definida por

$$G(s,t) = \begin{cases} Q(2s,t), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ P(2s-1,t), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Com isso definimos a operação composição . em $\pi_1(X,*)$

Teorema 7. $\pi_1(X,*)$ *juntamente com a operação . é um grupo, chamado de grupo fundamental de* X *(em* $*$*).*

Prova: O elemento identidade de $\pi_1(X,*)$ é

$$1_x = \{u_x\} \in \pi_1(x,x) = \pi_1(X,x),$$

onde u_x é o caminho constante em x, isto é, $u_x(s) = x$, para todo $s \in I$.

Se $[p] \in \pi_1(x,y)$ for outro elemento, $u_y.p$ e $p.u_x$ são dados da seguintes fórmulas:

$$(p.u_x)(s) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ p(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

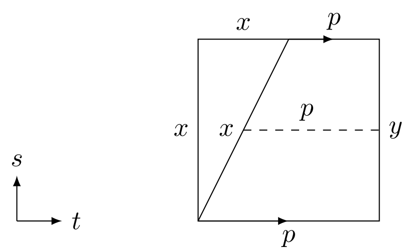
$$(u_y.p)(s) = \begin{cases} p(2s), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ y, & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Assim, $p.u_x \neq p$, mas mostraremos que $[p.u_x] = [p]$, ou seja, $p.u_x \sim p$. Agora $p.u_x$ é o caminho constante em x para a primeira metade do tempo s seguido pelo caminho p na outra metade, porém com o parâmetro $2s$.

Uma homotopia entre p e $p.u_x$ é dada por: considere no momento t, um caminho constante para $0 \leqslant s \leqslant \frac{t}{2}$ seguido por p para $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 1$.

Escrevemos $P(s,t)$ para a imagem se $s \in I$ ao longo do $t-$ésimo caminho. Interpretando a figura abaixo, temos a homotopia entre p e $p.u_x$:

$$P(s,t) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{t}{2} \\ p\left(\frac{2s-t}{2-t}\right), & \text{se } \frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$



Claramente, $P(s,0) = p(s)$ e $P(s,1) = (p.u_x)(s)$. Note que P está bem definido já que

$$0 \leqslant \frac{2s-t}{2-t} \leqslant \frac{2-t}{2-t} = 1, \text{ se } \frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 1$$

$$p\left(\frac{2(t/2)-t}{2-t}\right) = x, \quad P(0,t) = x \quad \text{e} \quad P(1,t) = y.$$

Similarmente prova-se que $u_y.p \sim p$.

Mostremos a propriedade simétrica de $(\pi_1(x,y), .)$. Dado $[p] \in \pi_1(x,y)$, definimos $[p]^{-1} = [q] \in \pi_1(y,x)$ onde $q(s) = p(1-s)$.

Se $P : p_0 \sim p_1$, definimos $Q : q_0 \sim q_1$ por

$$Q(s,t) = P(1-s,t).$$

Desde que

(i) $Q(0,t) = y$, $Q(1,t) = x$,

(ii) $Q(s,0) = q_0(s)$, $Q(s,1) = q_1(s)$,

esta operação está bem definida em classes de equivalência.

Devemos mostrar que $p.p^{-1} \sim u_y$. O caminho $p.p^{-1}$ percorre p duas vezes, primeiro de trás para frente e depois ao contrário:

$$(p.p^{-1})(s) = \begin{cases} p(1-2s), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ p(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Não há nenhuma razão para que o meio do caminho $p.p^{-1}$ seja x, escolhemos apenas para facilitar as contas. Podemos escolher uma homotopia de $p.p^{-1}$ para u_y que no tempo t mova-se através da parte de p (de 0 para t) e depois volta novamente:

$$P(s,t)=\begin{cases} p(1-2st), & \text{se } 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ p((2s-t)t+1-t), & \text{se } \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

Claramente temos:

(i) $P(0,t)=P(1,t)=y$,

(ii) $P(s,0)=y$ e $P(s,1)=(p.p^{-1})(s)$;

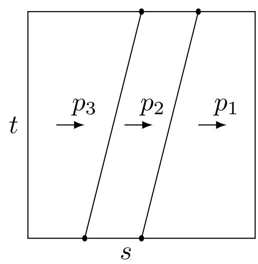
(iii) $p(1-2st)=p((2s-1)t+1-t)$ se $s=\frac{1}{2}$.

Provaremos a associativa de $(\pi_1(X,*),.)$. Sejam $[p_1]$, $[p_2]$ e $[p_3]\in\pi_1(X,*)$. Calcularemos $(p_1.p_2).p_3$ e $p_1.(p_2.p_3)$:

$$((p_1.p_2).p_3)(s)=\begin{cases} p_3(2s), & \text{se } 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ p_2(4s-2), & \text{se } \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant \frac{3}{4}\\ p_1(4s-3), & \text{se } \frac{3}{4}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

$$(p_1.(p_2.p_3)(s)=\begin{cases} p_3(4s), & \text{se } 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{4}\\ p_2(4s-1), & \text{se } \frac{1}{4}\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ p_1(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

Podemos notar que a única diferença entre estes caminhos é a velocidade. Poderíamos deslizar de um caminho para o outro, escolhendo velocidades intermediárias, como na figura abaixo:



As duas linhas inclinadas são dadas pelas equações $t=4s-1$ e $t=4s-2$. Para cada t traçamos os caminhos da seguinte forma:

- p_3 de $s=0$ para $s=\frac{t+1}{4}$;

- p_2 de $s = \frac{t+1}{4}$ para $s = \frac{t+2}{4}$;

- p_3 de $s = \frac{t+2}{4}$ para $s = 1$.

Isto é dado pela equação

$$P(s,t) = \begin{cases} p_3(\frac{4s}{t+1}), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{t+1}{4} \\ p_2(4s-t-1), & \text{se } \frac{t+1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{t+2}{4} \\ p_1(\frac{4s-t-2}{2-t}), & \text{se } \frac{t+2}{4} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Provemos agora que está bem definido. De fato, $\frac{4s}{t+1} \in I$, pois para $s = 0$ temos $\frac{4s}{t+1} = 0$ e para $s = \frac{t+1}{4}$ temos $\frac{4(\frac{t+1}{4})}{t+1} = \frac{t+1}{t+1} = 1$. Analogamente prova-se que $4s - t - 1 \in I$ e $\frac{4s-t-2}{2-t} \in I$. Veja também que

(i) $P(0,t) = p_3(0)$, $P(1,t) = p_1(1)$;

(ii) $P(s,0) = (p_1.(p_2.p_3))(s)$;

(iii) $P(s,1) = ((p_1.p_2).p_3)(s)$.

Portanto, $(\pi_1(X,*),.)$ é um grupo. ∎

Observação 8. Note que π é um funtor da categoria $\mathcal{C}^*$ para $\mathcal{G}$, onde $\mathcal{C}^*$ é a categoria dos espaços topológicos e das funções contínuas que preservam o ponto base e $\mathcal{G}$ é a categoria dos grupos e dos homomorfismo de grupos.

Sejam $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}^*$ e $\pi_1(f) = f_* : \pi_1(X,*) \to \pi_1(Y,*)$ em $\mathcal{G}$, a função f_* é chamada de induzida da f e definida por $f_*(p) = (f \circ p)$ para todo $p \in \pi_1(X,*)$. Como π_1 é um funtor temos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & \pi_1(X,*) \arrow[d, "f_*"] \\ Y \arrow[r, "\pi_1"'] & \pi_1(Y,*). \end{tikzcd}$$

Provaremos que o grupo fundamental não depende essencialmente de $*$, desde que X seja conexo por caminhos. Isso é curioso, pois parece que $\pi_1(X,*)$ depende tanto do espaço X como do ponto base $*$.

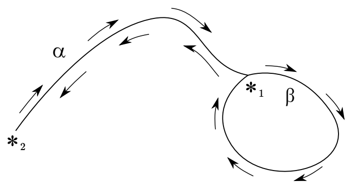
Teorema 9. *Sejam $*_1$, $*_2 \in X$ e suponhamos que $*_1$, $*_2$ pertençam a mesma componente conexa por caminhos de X. Então*

$$\pi_1(X, *_1) \cong \pi_1(X, *_2).$$

Prova: Como $*_1$ e $*_2$ pertencem à mesma componente conexa por caminhos de X, existe um caminho $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = *_2$ e $\alpha(1) = *_1$. Com isso defina o seguinte homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \pi_1(X, *_1) &\to \pi_1(X, *_2) \\ [\beta] &\mapsto [\alpha.\beta.\alpha^{-1}] \end{aligned}$$

Note que $\alpha.\beta.\alpha^{-1}$ é realmente um laço em $*_2$.



Para concluir que φ_α é bijetora defina sua inversa por:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha^{-1}} : \pi_1(X, *_2) &\to \pi_1(X, *_1) \\ [\gamma] &\mapsto [\alpha^{-1}.\gamma.\alpha]. \end{aligned}$$

Portanto, $\pi_1(X, *_1) \cong \pi_1(X, *_2)$. ∎

Proposição 10. *Se $f_0 \sim f_1 : (X, *) \to (Y, *)$ então*

$$f_{0*} = f_{1*} : \pi_1(X, *) \to \pi_1(Y, *).$$

Prova: Por hipótese $f_0 \sim f_1$, isto é, existe $H : X \times I \to Y$ contínua tal que $H(x, 0) = f_0(x)$, $H(x, 1) = f_1(x)$ e $H(*, t) = *$.

Dado $[p] \in \pi_1(X, *)$ qualquer, provaremos que $f_0 \circ p \sim f_1 \circ p$. De fato, defina $G : I \times I \to Y$ tal que $G(s, t) = H(p(s), t)$. Assim, $G(s, 0) = f_0(p(s))$, $G(s, 1) = f_1(p(s))$ e $G(0, t) = * = G(1, t)$. Logo, $f_0 \circ p \sim f_1 \circ p$.

Portanto, $f_{0*}([p]) = [f_0 \circ p] = [f_1 \circ p] = f_{1*}([p])$. ∎

Definição 11. Uma função contínua $f : (X, A) \to (Y, B)$ é chamada equivalência de homotopia, se existir uma função contínua $g : (Y, B) \to (X, A)$ tal que $g \circ f \sim 1_X$ e $f \circ g \sim 1_Y$. Neste caso, escrevemos $(X, A) \simeq (Y, B)$, e dizemos que os pares têm o mesmo tipo de homotopia.

Teorema 12. *Se $f : (X, *) \to (Y, *)$ é uma equivalência de homotopia, então $f_* : \pi_1(X, *) \to \pi_1(Y, *)$ é um isomorfismo.*

Prova: Primeiramente provaremos que f_* é bijetora. Para isso, mostraremos que f_* é inversível.

Como f é uma equivalência de homotopia, existe $g : (Y, *) \to (X, *)$ tal que $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$. Assim,

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = 1_{Y*},$$

e analogamente prova-se $g_* \circ f_* = 1_{X*}$. Com isso, a inversa de f_* é g_*. Portanto, f_* é bijetora. A demonstração de que f_* é homomorfismo é natural e portanto será omitida. ∎

Definição 13. Dizemos que $(X, *)$ é contrátil se $(X, *) \simeq (\{*\}, *)$.

Definição 14. Um conjunto X é chamado simplesmente conexo se X é conexo por caminhos e $\pi_1(X, *) = 0$.

4 Teorema de van Kampen

Vamos agora descrever uma ferramenta útil para o cálculo de π_1 que muitas vezes é conveniente para mostrar que um espaço é simplesmente conexo.

Suponhamos $X = X_1 \cup X_2$ com $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Escolha $* \in X_1 \cap X_2$. Então temos os homomorfismos

$$\begin{aligned} i_{1*} : \pi_1(X_1 \cap X_2, *) &\to \pi_1(X_1, *) \qquad & i_{2*} : \pi_1(X_1 \cap X_2, *) &\to \pi_1(X_2, *) \\ [p] &\mapsto [i_1 \circ p] & [p] &\mapsto [i_2 \circ p], \end{aligned}$$

onde $i_k : X_1 \cap X_2 \to X_k$, com $k = 1, 2$, são inclusões.

Sejam G, G_1 e G_2 grupos, e suponha que temos os homomorfismos

$$f_1 : G \to G_1 \quad \text{e} \quad f_2 : G \to G_2.$$

Vamos definir o produto amalgamado de G_1 e G_2 sobre G. Essencialmente este é o menor grupo gerado por G_1 e G_2 com $f_1(x) = f_2(x)$ para $x \in G$. Especificamente, seja F o grupo livre gerado pelo conjunto $G_1 \cup G_2$. Vamos escrever $x \cdot y$ para o produto em F.

Assim todo elemento de F é da forma $x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\varepsilon_k}$ onde $\varepsilon_i = \pm 1$ e $x_i \in G_1 \cup G_2$. Considere as palavras $(xy)^1 \cdot y^{-1} \cdot x^{-1}$ definido se ambos x e y pertencem a G_1 ou G_2, e $(f_1(g))^1 \cdot (f_2(g))^{-1}$ para $g \in G$.

Seja

$$R = \{(xy)^1 \cdot y^{-1} \cdot x^{-1}, (f_1(g))^1 \cdot (f_2(g))^{-1} \mid x, y \in G_1 \text{ ou } G_2, g \in G\},$$

que é um subgrupo normal de F.

Definição 15. O produto amalgamado de G_1 e G_2 sobre G, escrito como $G_1 *_G G_2$ é o grupo quociente

$$\frac{F}{R} = \{a \cdot R; a \in F\}.$$

Na definição do produto amalgamado, quocientamos F por R para que os elementos $(xy)^1 \cdot y^{-1} \cdot x^{-1}$ e $(f_1(g))^1 \cdot (f_2(g))^{-1}$ de F determinem o elemento neutro do quociente. Note que este elemento $(xy)^1 \cdot y^{-1} \cdot x^{-1}$ mesmo com $x, y \in G_1$ ou $x, y \in G_2$ não é igual ao elemento neutro, mas gostaríamos que fossem, por isso definimos o produto amalgamado como $\frac{F}{R}$. O mesmo raciocínio vale para os elementos desta forma; $(f_1(g))^1 \cdot (f_2(g))^{-1}$.

Observe que existem homomorfismos $g_i : G_i \to \frac{F}{R}$ obtidos como composição $G_i \xrightarrow{i} F \xrightarrow{Proj} \frac{F}{R}$, onde *Proj* é a projeção natural e $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$. Com efeito, dado $x \in G$ qualquer, então

$$g_1(f_1(x)) = (Proj \circ i)(f_1(x)) = Proj(f_1(x)) = (f_1(x))R$$

e

$$g_2(f_2(x)) = (Proj \circ i)(f_2(x)) = Proj(f_2(x)) = (f_2(x))R,$$

mas $(f_1(g))^1 \cdot (f_2(g))^{-1} \in R$ o que implica $(f_1(x)) \cdot R = (f_2(x)) \cdot R$.

Portanto, $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

Definição 16. Um par de subespaços (X_1, X_2) de X é dito excisivo se

$$X = (IntX_1) \cup (IntX_2).$$

Sejam $j_1 : X_1 \to X$ e $j_2 : X_2 \to X$ as inclusões.

O Teorema de van Kampen nos permite calcular $\pi_1(X)$, conhecidos $\pi_1(X_1)$, $\pi_1(X_2)$ e $\pi_1(X_1 \cap X_2)$. Para provarmos este teorema precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 17. (a) *Suponha que* $h_i : G_i \to H$ *são homomorfismos tais que* $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$. *Então existe um único homomorfismo* $h : G_1 *_G G_2 \to H$ *com* $h \circ g_i = h_i$.

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
G_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & \frac{F}{R} \arrow[d, "h"] & G_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[dl, "h_2"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

(b) *Se cada elemento* $x \in H$ *pode ser escrito como* $x = x_1 \dots x_k$ *com* $x_s = h_i(a_s)$ *para algum* i, *então* h *é sobrejetora.*

Prova: (a) Seja $h' : F \to H$ definida por $h'|_{G_s} = h_s$ com $s = 1, 2$, isto é possível desde que F é um grupo livre gerado por $G_1 \cup G_2$. Provaremos agora que $h'(R) = 1$. De fato, como h' é homomorfismo temos:

$$\begin{aligned}
h'((x_i x_j)^1 \cdot x_j^{-1} \cdot x_i^{-1}) &= h'((x_i x_j)^1) h'(x_j)^{-1} h'(x_i)^{-1} \\
&= h_s(x_i x_j) h_s(x_j)^{-1} h_s(x_i)^{-1} \\
&= h_s(x_i) h_s(x_j) h_s(x_j)^{-1} h_s(x_i)^{-1} = 1;
\end{aligned}$$

$$h'(1_s^{-1}) = h'(1_s)^{-1} = h_s(1)^{-1} = 1;$$

$$
\begin{aligned}
h'((f_1(g))^1 \cdot (f_2(g))^{-1}) &= h'((f_1(g))^1)h'(f_2(g))^{-1} \\
&= h_1(f_1(g))h_2(f_2(g))^{-1} = 1.
\end{aligned}
$$

Assim, h' determina um homomorfismo $h : G_1 *_G G_2 \to H$ definido por $h(aR) = h'(a)$, onde $a \in F$. Mostraremos que h é um homomorfismo.

(i) h está bem definida.

Com efeito, sejam $a, b \in F$ quaisquer. Assim,

$$aR = bR \Rightarrow ba^{-1} \in R \Rightarrow h'(ba^{-1}) = 1 \Rightarrow h'(b)h'(a)^{-1} = 1 \Rightarrow h'(b) = h'(a).$$

(ii) h é homomorfismo.

Sejam $a, b \in F$. Então

$$h(aR \cdot bR) = h(abR) = h'(ab) = h'(a)h'(b) = h(aR)h(bR).$$

Observe que, por construção $h \circ g_i = h'|_{G_i} = h_i$, daí claramente se concluí que h é única.

(b) Seja $x = x_1 \dots x_k \in H$ qualquer. Então,

$$x = x_1 \dots x_k = h_{i_1}(a_1) \dots h_{i_k}(a_k) = h(g_{i_1}(a_1) \dots g_{i_k}(a_k)) = h(a_1 \dots a_k).$$

Note que usamos o fato de $h \circ g_i = h_i$ para concluir que h é sobrejetora. ■

Teorema 18 (Teorema de van Kampen). *Suponhamos que (X_1, X_2) é excisivo e X, X_1, X_2, $X_1 \cap X_2$ são conexos por caminhos. Seja $* \in X_1 \cap X_2$. Então existe um isomorfismo*

$$\pi_1(X, *) \cong \pi_1(X_1, *) *_{\pi_1(X_1 \cap X_2, *)} \pi_1(X_2, *),$$

com $(j_1)_*$ e $(j_2)_*$ correspondendo a g_1 e g_2.

Prova: Para facilitar a redação, usaremos o termo *caminho pequeno* (*homotopia pequena*) para caminho (homotopia) tal que sua imagem está contida em X_1 ou X_2.

Considere os seguintes homomorfismos, com $k = 1, 2$,

$$
\begin{aligned}
(j_k)_* : \pi_1(X_k, *) &\to \pi_1(X, *) \qquad & (i_{k*}) : \pi_1(X_k, *) &\to \pi_1(X, *) \\
[p] &\mapsto [p] & [p] &\mapsto [i \circ p]
\end{aligned}
$$

Observe essas funções no seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X_1 \cap X_2, *) \arrow[dl, "i_{1*}"'] \arrow[dr, "i_{2*}"] & \\
\pi_1(X_1, *) \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & \pi_1(X_1, *) *_{\pi_1(X_1 \cap X_2, *)} \pi_1(X_2, *) \arrow[d, "h"] & \pi_1(X_2, *) \arrow[l, "g_2"'] \arrow[dl, "h_2"] \\
 & \pi_1(X, *) &
\end{tikzcd}$$

Note que $(j_1)_* \circ i_{1*} = (j_2)_* \circ i_{2*}$, assim pela Proposição 17(a) existe um homomorfismo

$$h : \pi_1(X_1, *) *_{\pi_1(X_1 \cap X_2, *)} \pi_1(X_2, *) \to \pi_1(X, *).$$

Mostraremos que h é um isomorfismo.

Primeiramente provaremos que h é sobrejetora. De fato, dado $[p] \in \pi_1(X, *)$, isto é, $p : I \to X$ é um laço em $*$. I é coberto por $p^{-1}(Int(X_1))$ e $p^{-1}(Int(X_2))$, pois $X = Int(X_1) \cup Int(X_2)$. Como $p^{-1}(Int(X_1))$ e $p^{-1}(Int(X_2))$ são abertos e I é compacto existe um número de Lebesgue $\varepsilon > 0$ para esta cobertura. Assim, podemos escolher

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

de modo que $t_i - t_{i-1} < \varepsilon$ e por isso $p([t_{i-1}, t_i]) \subset X_1$ ou X_2.

Suponha que esta partição foi escolhida de modo que

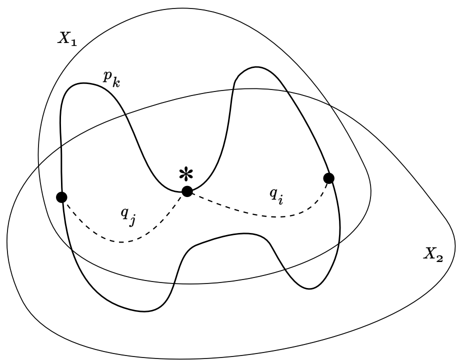
$$p(t_i) \in X_1 \cap X_2; \forall i = 0, 1, \ldots n,$$

caso contrário $[t_{i-1}, t_i]$ e $[t_i, t_{i+1}]$ podem ser combinados em um único intervalo $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ (pois $p([t_{i-1}, t_{i+1}]) \subset X_j$ com $j = 1$ ou $j = 2$) e assim t_i não precisaria pertencer a partição escolhida de I.

Escolha caminhos $q_i : I \to X_1 \cap X_2$ com $q_i(0) = *$ e $q_1(1) = p(t_i)$ para $0 \leqslant i \leqslant n$ com $q_0 = q_n = *$. Estes caminhos q_i existem, pois $*$ e $p(t_i)$ pertencem a $X_1 \cap X_2$ e $X_1 \cap X_2$ é conexo por caminhos.

Agora escrevemos $p_i : I \to X$ para o caminho $p|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Assim,

$$p = p_{n-1} \cdot \ldots \cdot p_1 \cdot p_0.$$



Logo,

$$p \sim {q_n}^{-1} \cdot p_{n-1} \cdot q_{n-1} \cdot q_{n-1}^{-1} \cdot p_{n-2} \cdot q_{n-2} \cdot \ldots \cdot q_2^{-1} \cdot p_1 \cdot q_1 \cdot q_1^{-1} \cdot p_o \cdot q_0.$$

Agora, cada classe $[q_k^{-1} \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-1}]$ pertence ou a $\pi_1(X_1, *)$ ou a $\pi_1(X_2, *)$ e assim $q_k^{-1} \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-1} = (j_i)_*(q_k^{-1} \cdot p_{k-1} \cdot q_{k-1})$. Então pela Proposição 17 (b) temos que h é sobrejetora. Assim, o fato de h ser sobrejetora pode ser reafirmado, pode-se dizer que todo o caminho com ponto base é o produto de caminhos pequenos com ponto base.

Para mostrarmos que h é um isomorfismo, resta provarmos que h é injetora, isto é, $\ker h = 1 = [*] \in \pi_1(X_1, *) *_{\pi_1(X_1 \cap X_2, *)} \pi_1(X_2, *)$.

Suponhamos caminhos pequenos com ponto base $p_1, \ldots, p_m$ tais que

$$h(\overline{[p_m] \cdot \ldots \cdot [p_1]}) = 1.$$

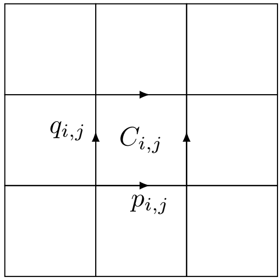
Usamos $\overline{[p]}$ para indicar que a classe $[p]$ pertence ao produto amalgamado.

Então há uma homotopia H em X entre o produto $\overline{p_m \cdot p_{m-1} \cdot \ldots \cdot p_1}$ e o caminho constante $*$. Gostaríamos de mostrar que

$$\overline{[p_m] \cdot \ldots \cdot [p_1]} = \overline{[p_m \cdot \ldots \cdot p_1]} = 1$$

no produto amalgamado.

Para isto iremos subdividir $I \times I$ em pequenos retângulos $C_{i,j}$ tais que $H|_{C_{i,j}}$ sejam pequenos. Daí, seguindo as arestas horizontais desse quadrado obteremos uma sequência de caminhos em X de $\overline{p_m \cdot \ldots \cdot p_1}$ para $*$,



cada um dos quais sendo escrito como um produto de caminhos pequenos, e de tal modo que quaisquer dois caminhos adjacentes diferem por uma homotopia pequena. Será necessário um pouco de cuidado, pois esses caminhos pequenos não são necessariamente baseados. Lidaremos com isso por meio dos caminhos $r_{i,j}$, abaixo.

Cubra $I \times I$ por $H^{-1}(Int(X_1))$ e $H^{-1}(Int(X_2))$, e escolha um número de Lebesgue $\varepsilon > 0$ para esta cobertura.

Sejam $K > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon m}$ e $n = km$. Considere os quadrados abaixo:

$$C_{i,j} = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right].$$

Sabemos que $H(C_{i,j})$ está contido em X_1 ou X_2. Sejam

$$p_{i,j} = H|_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left\{\frac{j}{n}\right\}} \quad \text{e} \quad q_{i,j} = H|_{\left\{\frac{j}{n}\right\} \times \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]},$$

$p_{i,j}$ e $q_{i,j}$ são portanto caminhos pequenos, mas não são em geral caminhos com ponto base.

Para cada vértice $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$, escolha um caminho $r_{i,j}$ de $H(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ para $*$ que se encontra em X_1, X_2 ou $X_1 \cap X_2$ se $H(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ pertence a X_1, X_2 ou $X_1 \cap X_2$, respectivamente. Isso é possível pois X_1, X_2 e $X_1 \cap X_2$ são conexos por caminhos. No caso $H(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = *$, escolha $r_{i,j}$ como sendo o caminho constante $*$. Assim, por conjugação

$$\widetilde{p}_{i,j} = r_{i+1,j} \cdot p_{i,j} \cdot {r_{i,j}}^{-1} \quad \text{e} \quad \widetilde{q}_{i,j} = r_{i,j+1} \cdot q_{i,j} \cdot {r_{i,j}}^{-1}$$

são caminhos pequenos com ponto base. Consequentemente, qualquer palavra em $[\widetilde{p}_{i,j}]$ e $[\widetilde{q}_{i,j}]$ representa um elemento no produto amalgamado.

Há uma homotopia pequena

$$q_{i+1,j} \cdot p_{i,j} \sim p_{i,j+1} \cdot q_{i,j} \tag{1.1}$$

relativa aos extremos, pois ambos os caminhos estão na imagem de

$$H_* : \pi_1\left(C_{i,j}; \left(\tfrac{i}{n}, \tfrac{j}{n}\right), \left(\tfrac{i+1}{n}, \tfrac{j+1}{n}\right)\right) \to \pi_1\left(X_\delta; H\left(\tfrac{i}{n}, \tfrac{j}{n}\right), H\left(\tfrac{i+1}{n}, \tfrac{j+1}{n}\right)\right)$$

com $\delta = 1$ ou 2 e por (1.1)

$$\pi_1\left(C_{i,j}; \left(\tfrac{i}{n}, \tfrac{j}{n}\right), \left(\tfrac{i+1}{n}, \tfrac{j+1}{n}\right)\right)$$

tem apenas um elemento. A partir da homotopia em (1.1) é fácil produzir uma homotopia pequena baseada

$$r_{i+1,j+1} \cdot q_{i+1,j} \cdot p_{i,j} \cdot r_{i,j}^{-1} \sim r_{i+1,j+1} \cdot p_{i,j+1} \cdot q_{i,j} \cdot r_{i,j}^{-1}.$$

o que implica que

$$r_{i+1,j+1} \cdot q_{i+1,j} \cdot r_{i+1,j}^{-1} \cdot r_{i+1,j} \cdot p_{i,j} \cdot r_{i,j}^{-1} \sim r_{i+1,j+1} \cdot p_{i,j+1} \cdot r_{i,j+1}^{-1} \cdot r_{i,j+1} \cdot q_{i,j} \cdot r_{i,j}^{-1}$$

e por isso temos

$$[\widetilde{q}_{i+1,j}] \cdot [\widetilde{p}_{i,j}] = [\widetilde{p}_{i,j+1}] \cdot [\widetilde{q}_{i,j}]$$

no produto amalgamado. Assim,

$$[\widetilde{p}_{i,j}] = [\widetilde{q}_{i+1,j}^{-1}] \cdot [\widetilde{p}_{i,j+1}] \cdot [\widetilde{q}_{i,j}].$$

Podemos concluir que

$$[\widetilde{p}_{n-1,0}] \dots [\widetilde{p}_{0,0}] = \left([\widetilde{q}_{n,0}^{-1}] \dots [\widetilde{q}_{n,n-1}^{-1}]\right) \cdot \left([\widetilde{p}_{n-1,n}] \dots [\widetilde{p}_{0,n}]\right) \cdot \left([\widetilde{q}_{0,n-1}] \dots [\widetilde{q}_{0,0}]\right).$$

O produto do lado direito é homotópico ao caminho constante $*$ e por isso representado por $*$. Assim,

$$[\widetilde{p}_{n-1,0}] \dots [\widetilde{p}_{0,0}] = [*].$$

Para finalizar mostraremos que

$$\overline{[p_m] \dots [p_1]} = [\widetilde{p}_{n-1,0}] \dots [\widetilde{p}_{0,0}].$$

Escolha $a \in \mathbb{Z}$ com $0 \leqslant a \leqslant m-1$. Desde que $n = km$, $[\widetilde{p}_{s,0}]$ estão contidos ou em X_1 ou X_2 para $ak \leqslant s \leqslant (a+1)k-1$. Assim a palavra

$$\overline{[\widetilde{p}_{(a+1)k-1,0}]}\cdots\overline{[\widetilde{p}_{ak,0}]}$$

é equivalente à palavra de uma única letra

$$\overline{[\widetilde{p}_{(a+1)k-1,0}\cdots\widetilde{p}_{ak,0}]}$$

no produto amalgamado. Porém

$$p_{a+1} \sim p_{(a+1)k-1,0}\cdots p_{ak,0} \sim \widetilde{p}_{(a+1)k-1,0}\cdots\widetilde{p}_{ak,0}$$

assim

$$[p_{a+1}] = [\widetilde{p}_{(a+1)k-1,0}]\cdots[\widetilde{p}_{ak,0}].$$

■

5 Aplicações

Faremos agora algumas aplicações do Teorema de van Kampen.

Teorema 19. *$\pi_1(S^n) = 0$ para $n > 1$.*

Prova: Sejam

$$X_1 = \{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} < 1\},$$
$$X_2 = \{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > -1\}.$$

Note que $S^n = X_1 \cup X_2$ e que X_1 e X_2 são abertos e conexos por caminhos. Pela projeção estereográfica X_1 e X_2 são homeomorfos a $\mathbb{R}^n$. Sabemos também que $\mathbb{R}^n$ é contrátil e assim $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(X_1) = \pi_1(X_2) = 0$.

Observe que $X_1 \cap X_2$ é conexo por caminhos, pois $X_1 \cap X_2$ é homeomorfo $\mathbb{R}^n - \{0\}$ que é conexo por caminhos.

Agora, aplicando o Teorema de van Kampen, temos:

$$\pi_1(S^n) \cong 0 *_{\pi_1(X_1\cap X_2)} 0 = 0.$$

■

Observação 20. Sabemos que S^n é conexo por caminhos, assim dizemos que S^n é simplesmente conexo para $n > 1$.

Teorema 21. *Seja X a união de dois círculos no plano com um ponto em comum. Então $\pi_1(X)$ é o grupo livre em dois geradores.*

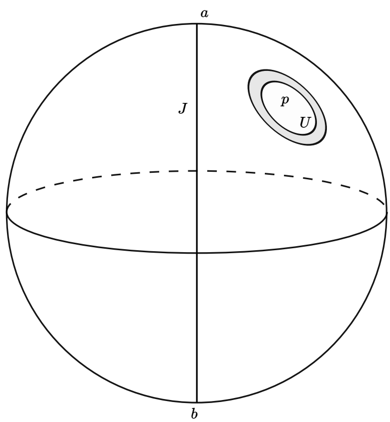
Prova: Seja p o ponto em comum e escolha os pontos p_1 e p_2 em cada um dos círculos, sendo estes distintos de p. Então, $(X - \{p_1\}, p) \simeq (S^1, p)$, $(X - \{p_2\}, p) \simeq (S^1, p)$ e $((X - \{p_1\}) \cap (X - \{p_2\}), p) \simeq (p, p)$. Assim por van Kampen, este é o grupo livre em dois geradores x e y:

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1(S^1, p) *_{\pi_1(p,p)} \pi_1(S^1, p) \cong \langle x \rangle *_0 \langle y \rangle.$$

■

Teorema 22. *Se $X = S^2 \cup J$, onde J é um segmento unindo dois pontos quaisquer de S^2, então $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$.*

Prova: Sejam a e b os pontos de interseção entre S^2 e J. Escolha $p \in X - J$ qualquer. Existe $X_2 = B(p; \delta) \cap S^2$, uma vizinhança de p, tal que $X_2 \cap J = \emptyset$, para δ suficientemente pequeno. Tome $U \subset X_2$ outra vizinhança de p e considere $X_1 = X - U$.



Note que $X = (X_1, X_2)$ é excisivo e X, X_1, X_2 e $X_1 \cap X_2$ são conexos por caminhos. Sabemos que $X_1 \simeq S^1$, $X_2 \simeq \{p\}$ e $X_1 \cap X_2 \simeq S^1$. Logo,

$$\pi_1(X_1) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(X_2) = 0, \quad \pi_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z}.$$

Pelo Teorema de van Kampen segue que

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(X_1) *_{\pi_1(X_1 \cap X_2)} \pi_1(X_2) \cong \mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} 0 = \mathbb{Z}.$$

■

Agradecimentos: Agradeço o meu orientador Thiago de Melo e ao auxílio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Abstract: In Algebraic Topology the homotopy theory is a very important subject. The fundamental group is the simplest invariant in this theory and we had defined it in this work. Also we discussed how to compute such group making use of the van Kampen Theorem.

Keywords: homotopy; loop; fundamental group.

Referências Bibliográficas

[1] Bredon, G. E. *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **139**, Springer (2010).

[2] Gray, B. *Homotopy Theory. An Introduction to Algebraic Topology*, Pure and applied mathematics series, **64** (1975).

[3] Hatcher, A. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).

[4] Munkres, J. R. *Topology*, Prentice Hall, Inc. (2000).

[5] Lima, E. L. *Grupo fundamental e espaço de recobrimento*, Rio de Janeiro: IMPA, (2006).

Estabilidade de Equações Diferenciais com Retardamento pelo Segundo Método de Lyapunoff e Aplicações

Márcia Ritchielle da Silva[1]

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Neste trabalho apresentamos alguns resultados sobre a estabilidade das Equações Diferenciais com Retardamento, em relação ao ponto de equilíbrio $x = 0$, com base no segundo método de Lyapunoff e segundo a referência [1].

Palavras-chave: Retardo; Lyapunoff; Estabilidade.

1 Introdução

O objetivo deste artigo é fazer um estudo introdutório sobre estabilidade de equações diferenciais com retardamento (EDR) utilizando o segundo método de Lyapunoff. Também podemos observar que diferentemente das equações diferenciais ordinárias, a determinação de solução de uma EDR depende não apenas do conhecimento da mesma em um dado instante inicial t_0, mas sim do conhecimento da solução em um certo intervalo anterior a t_0.

Na seguinte seção introduzimos alguns conceitos básicos sobre as equações diferenciais com retardamento e os diferentes conceitos de estabilidade. Já na segunda seção, apresentamos critérios de estabilidade, na linha do segundo método de Lyapunoff, considerando um funcional $v(t, \varphi)$, definido em $[0, \infty) \times C_H$ com valores em $\mathbb{R}$, satisfazendo certas propriedades que garantem a estabilidade das soluções em torno do ponto de equilíbrio $x = 0$. E por fim, na terceira seção, temos duas aplicações dos resultados estabelecidos na seção anterior.

[1]Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET)–SESu/MEC

2 Definições

Vamos introduzir primeiramente o conjunto no qual as condições iniciais da EDR serão consideradas. Sejam $0 \leq h < \infty$, $0 < H \leq \infty$,

$$C_H = \{\varphi \in C = C([-h,0],\mathbb{R}^n); \|\varphi\| < H\},$$

onde $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-h,0]$ no $\mathbb{R}^n$, com a norma $\|\varphi\| = \sup_{-h\leq x\leq 0} |\varphi(x)|$, denotando $|\,\cdot\,|$ uma norma do $\mathbb{R}^n$. No caso em que $H = \infty$, $C_H = C_\infty = C$, isto é, C_H é o próprio espaço de Banach C.

Definição 1. Sejam $0 < A \leq \infty$ e $x : [t_0 - h, t_0 + A] \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e seja t, $t_0 \leq t \leq t_0 + A$. Definimos x_t como sendo o elemento de C dado por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ para $-h \leq \theta \leq 0$.

Definição 2. Seja $f : [0,\infty) \times C_H \to \mathbb{R}^n$ uma função, a equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

é chamada uma **Equação Diferencial com Retardamento**.

Vamos considerar $\psi \in C_H$ e a condição inicial no dado instante t_0, denotada por $x_{t_0} = \psi$, ou seja, $x_{t_0}(\theta) = \psi(\theta)$, com $\theta \in [-h,0]$.

Definição 3. Sejam $t_0 \geq 0$ e $\psi \in C_H$. Uma função $x : [t_0-h, t_0+A) \to \mathbb{R}^n$ contínua é dita uma solução de (1.1) com função inicial ψ em t_0 se:

i) $x_t \in C_H$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$;

ii) $x_{t_0} = \psi$;

iii) $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$.

Indicamos por $x(t; t_0, \psi)$ a solução da EDR, cuja função inicial em t_0 é ψ.

Usamos a notação $x_t(t_0, \psi)$ para indicar o elemento de C, dado por:

$$x_t(t_0,\psi)(\theta) = x_t(t_0 + \theta; t_0, \psi), \theta \in [-h, 0].$$

Definição 4. Dizemos que $x = 0$ é **estável**, se dados $\epsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \delta$ e $t \geq t_0$ implica $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \epsilon$.

Definição 5. Dizemos que $x = 0$ é **uniformemente estável**, se dados $\epsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \delta$ e $t \geq t_0$ implicam $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \epsilon$.

Definição 6. Dizemos que $x = 0$ é **assintoticamente estável** se a definição de estabilidade é satisfeita e a todo $t_0 \geq 0$, $\exists \rho = \rho(t_0) > 0$ correspondente, tal que $\|\varphi\| < \rho$ implicam $x(t; t_0, \varphi) \to 0$, com $t \to \infty$.

Definição 7. Dizemos que $x = 0$ é **uniformemente assintoticamente estável** se a definição (4) é satisfeita e $\exists \rho > 0$ de modo que, $\forall \epsilon > 0$, $\exists T(\epsilon) \geq 0$ correspondente, tal que se $\|\varphi\| < \rho$ e $t_0 \geq 0$, então $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \epsilon$, para $t \geq t_0 + T(\epsilon)$.

Definição 8. Dizemos que $x = 0$ é **globalmente assintoticamente estável** se $H = \infty$ e a definição (6) é satisfeita, com $\rho(t_0) = \infty$.

Vale observar que para equações diferenciais ordinárias, o Segundo Método de Lyapunoff é desenvolvido. A seguir vamos apresentar alguns resultados para EDR sobre este método inspirado pelo caso ordinário, considerando inicialmente um funcional com algumas propriedades.

Definição 9. Seja $v(t, \varphi)$ um funcional definido para $t \geq 0, \varphi \in C_H$, isto é, $v(t, \varphi)$ é uma aplicação contínua definida em $[0, \infty) \times C_H$ com valores em $\mathbb{R}$ e considere $v(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$.

O funcional $v(t, \varphi)$ é chamado de **positivo-definido** se existir uma função escalar contínua $\omega(r), r \geq 0$, tal que $v(t, \varphi) \geq \omega(\|\varphi\|)$, para $t \geq 0, \varphi \in C_H$, com ω satisfazendo $\omega(r) > 0$, com $r > 0$.

O funcional $v(t, \varphi)$ é dito **negativo-definido** se $-v(t, \varphi)$ for positivo-definido.

Para todo funcional $v(t,\varphi)$, $t_0 \geq 0, \varphi \in C_H$, definimos

$$\dot{v}(t_0,\varphi) = \dot{v}(t;x_t(t_0,\varphi)) = \overline{\lim_{r\to 0^+}} \frac{1}{r}\left[(v(t_0+r;x_{t_0+r}(t_0,\varphi)) - v(t_0,\varphi)\right],$$

onde $\overline{\lim}$ indica o limite superior e $x(t;t_0,\varphi)$ é solução de (1.1), com condição inicial $x_{t_0} = \varphi$.

Definição 10. Dizemos que o funcional $v(t,\varphi)$ tem **extremo superior infinitésimo** se existir uma função escalar contínua $\xi(r)$, com $r > 0$, tal que $|v(t,\varphi)| \leq \xi(\|\varphi\|)$, para $t \geq 0, \varphi \in C_H$ e $\xi(0) = 0$.

Definição 11. O funcional $v(t,\varphi)$ definido em $[0,\infty) \times C$, é dito **radialmente ilimitado** se existir uma função escalar contínua $\gamma(r)$ tal que $v(t,\varphi) \geq \gamma(\|\varphi\|)$ e $\gamma(r) \to \infty$, quando $r \to \infty$.

3 Segundo Método de Lyapunoff

Nesta seção, vamos supor válidos o Teorema de Existência e Unicidade e os resultados sobre extensão de solução para EDR, ver referência [1].

Supomos ainda que a origem seja um ponto de equilíbrio de $\dot{x}(t) = f(t,x_t)$, isto é, $f(t,0) = 0, t \geq 0$.

Observação 12. Quando a equação $\dot{y}(t) = g(t,y_t)$ tem um único ponto de equilíbrio $y^* \neq 0$, podemos notar que a partir da mudança de variável $x = y - y^*$ temos, $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = g(t,x_t + y_t^*) = f(t,x_t) = 0 \Rightarrow x^* = 0$ é ponto de equilíbrio da equação $\dot{x} = f(t,x_t)$, onde $x_t = y_t - y_t^*$.

Portanto, a hipótese $f(t,0) = 0, \forall t$ implica que $x = 0$ é ponto de equilíbrio da equação $\dot{x}(t) = f(t,x_t)$. E assim, basta efetuarmos os resultados de estabilidade para o ponto de equilíbrio $x = 0$ de (1.1).

Seja $g(t)$ uma função escalar contínua, definida em $[a,b)$, $b \leq \infty$. A expressão

$$\overline{\lim_{r\to 0^+}} \frac{g(t+r) - g(t)}{r},$$

tem sempre significado, podendo ser $+\infty$ ou $-\infty$. Este limite é denotado por $\dot{g}(t)$.

No caso em que $g(t)$ é diferenciável, $\dot{g}(t)$ coincide com a derivada de $g(t)$ no sentido usual.

Com relação à derivada de $g(t)$, tomada no sentido acima, temos os seguinte lemas, que são fundamentais para o Segundo Método de Lyapunoff e estão demonstrados na referência [1].

Lema 13. *Seja $g(t)$ contínua com $\dot{g}(t) \leq 0$ ($\dot{g}(t) \geq 0$) para $a \leq t < b$. Então, $g(t)$ é não crescente (não decrescente) em $[a, b)$.*

Lema 14. *Suponha $g(t)$ contínua com $\dot{g}(t) \leq -\sigma$ ($\dot{g}(t) \geq \sigma$), $\sigma > 0$ em $[a, b)$. Então, $g(t) \leq g(t_0) - \sigma(t - t_0)$ ($g(t) \geq g(t_0) + \sigma(t - t_0)$) para $a \leq t_0 \leq t < b$.*

Teorema 15. *Suponhamos que exista um funcional $v(t, \varphi)$, positivo-definido e satisfazendo $\dot{v}(t, \varphi) \leq 0$. Então, a solução $x = 0$ de (1.1) é estável.*

Prova: Suponhamos por absurdo que $x = 0$ não seja estável. Ou seja, suponha que exista $\epsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, existem φ e t_1 tais que $\|\varphi\| < \delta, t_1 \geq t_0$ e $\|x_{t_1}(t_0, \varphi)\| = \epsilon$.

Note que $v(t, \varphi)$ é um funcional linear contínuo em $[0, \infty) \times C_H$, então $v(t, \varphi)$ é contínuo em $(t_0, \varphi \equiv 0)$.

Assim, para $\omega(\epsilon) > 0$, existe $\delta_0 = \delta_0(t, \epsilon)$ tal que $\|(t_0, 0) - (t_0, \psi)\| < \delta_0$, neste caso então $\|\psi\| < \delta_0$, implica $|v(t_0, 0) - v(t_0, \psi)| < \omega(\epsilon) \Rightarrow v(t_0, \psi) < \omega(\epsilon)$.

O que implicaria

$$v(t_1, x_{t_1}(t_0, \varphi)) \geq \omega\left(\|x_{t_1}(t_0, \varphi)\|\right) = \omega(\epsilon) > v(t_0, \varphi) = v(t_0, x_{t_0}(t_0, \varphi)).$$

Ou seja,

$$v(t_1, x_{t_1}(t_0, \varphi)) \geq v(t_0, x_{t_0}(t_0, \varphi)). \tag{1.2}$$

Como $v(t, \varphi)$ é não crescente e pelo Lema 3, segue que se $t_0 < t_1$, então $v(t_0, x_{t_0}(t_0, \varphi)) > v(t_1, x_{t_1}(t_1, \varphi))$, o que contraria (1.2). ∎

Teorema 16. *Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$ positivo-definido, tendo extremo superior infinitésimo, com $\dot{v}(t,\varphi) \leq 0$. Então, a solução $x = 0$ de (1.1) é uniformemente estável.*

Prova: Por hipótese, $v(t_0,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|), \forall t \geq 0$. Como $\xi(r)$ é contínua e $\xi(0) = 0$, segue que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \delta \Rightarrow |\xi(\|\varphi\|) - \xi(0)| < \epsilon \Rightarrow |\xi(\|\varphi\|)| < \epsilon$.

Assim, dado $\epsilon > 0, \forall t \geq t_0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $v(t_0,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|) < \omega(\epsilon) = \epsilon$, independente de t_0, pois $\delta = \delta(\epsilon)$ vem da continuidade de ξ.

Repetindo o argumento do teorema anterior, segue a estabilidade. Como δ independe de t_0, segue a estabilidade uniforme, como queríamos demonstrar. ■

Definição 17. Seja a solução $x = 0$ de (1.1) assintoticamente estável. Dado $t_0 \geq 0$, o conjunto

$$D_{t_0} = \{\varphi \in C_H / x(t;t_0,\varphi) \to 0, t \to \infty\}$$

é chamado o **centro de atração** do ponto de equilíbrio $x = 0$ em t_0.

Teorema 18. *Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$ positivo-definido, tendo extremo superior infinitésimo, com $\dot{v}(t,\varphi)$ negativo-definido. Então, a solução $x = 0$ de (1.1) é uniformemente assintoticamente estável.*

Prova: Como $\dot{v}(t,\varphi)$ é negativo-definido, então existe $\omega(r)$, $r > 0$ tal que $-\dot{v}(t,\varphi) \geq \omega(\|\varphi\|) \geq 0$. Logo, $\dot{v}(t,\varphi) \leq 0$. Pelo teorema (16), segue a estabilidade uniforme.

Como $v(t,\varphi)$ é positivo-definido e tem extremo superior infinitésimo, existem funções escalares contínuas $\omega(r)$ e $\xi(r)$, com $\omega(r) > 0$ para $r > 0$ e $\xi(0) = 0$ tal que $\omega(\|\varphi\|) \leq v(t,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|)$, para $t \geq t_0, \varphi \in C_H$.

Sejam $H_1, H_2, 0 < H_1 < H_2 < H$, escolhidos de modo que $\xi(H_1) < \omega(H_2)$, pois dado $0 < H_2 < H$, como ω é contínua em $[H_2, H]$, existe $\min_{r\in[H_2,H]} \omega(r) = \alpha > 0$.

Agora, $\xi(r) \to 0$, quando $r \to 0$, pois ξ é contínua, então dado H_2, sempre existe α.

Basta tomar $H_1 > 0$ tal que $\xi(H_1) < \alpha$.

Afirmação: $t_0 \geq 0, \varphi \in C_H$ implicam $x_t(t_0,\varphi) \in C_{H_2}$ para $t_0 \leq t < t^+$.

De fato, suponhamos que isto não seja verdade. Então, existem t_1, t_2, $t_1 < t_2$, com $\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\| = H_1$ e $\|x_{t_2}(t_0,\varphi)\| = H_2$.

Portanto,

$$v(t_1; x_{t_1}(t_0,\varphi)) \leq \xi(\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\|) = \xi(H_1) < \omega(H_2) = \\ \omega(\|x_{t_2}(t_0,\varphi)\|) \leq v(t_2; x_{t_2}(t_0,\varphi)).$$

Segue do Lema (3) que existe $\tau, t_1 < \tau < t_2$, tal que $\dot{v}(\tau; x_\tau(t_0,\varphi)) > 0$, o que nos leva a uma contradição.

Então, $t_0 \geq 0, \varphi \in C_H$ implicam $x_t(t_0,\varphi) \in C_{H_2}$ para $t_0 \leq t < t^+, t^+ = \infty$. Como $x = 0$ é uniformemente estável, dado $\epsilon > 0$, com $0 < \epsilon < H_1, \exists \delta = \delta(\epsilon)$, tal que $\varphi \in C_\delta$ implica $x_t(t_0,\varphi) \in C_\epsilon$ para $t_0 < t < \infty$.

Como $\dot{v}(t,\varphi)$ é negativo-definido, existe uma função escalar $\sigma(r) > 0$ para $r > 0$, com $\dot{v}(t,\varphi) \leq -\sigma(\|\varphi\|)$.

Sejam $0 < \gamma = \inf_{\delta \leq r \leq H_2} \sigma(r)$, $M > \sup_{0 \leq r \leq H_1} \xi(r)$ e $T = \frac{M}{\gamma}$.

Note que T não depende de t_0 e portanto $T(\epsilon) = T$.

Afirmamos que $\varphi \in C_{H_1}$ implica $x_{\tilde{t}}(t_0,\varphi) \in C_\delta$ para algum instante $\tilde{t}$, $t_0 \leq \tilde{t} \leq t_0 + T$.

Mostremos novamente por contradição. Suponhamos que isto não seja verdade. Então, $\delta \leq \|x_t(t_0,\varphi)\| \leq H_2$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ e, portanto,

$$\dot{v}(t; x_t(t_0,\varphi)) \leq -\sigma(\|x_t(t_0,\varphi)\|) \leq -\inf_{\delta \leq r \leq H_2} \sigma(r) = -\gamma,$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Segue do Lema (14) que $v(t; x_t(t_0,\varphi)) \leq v(t_0,\varphi) - \gamma(t - t_0)$, para $0 \leq t_0 \leq t \leq t_0 + T$ e, por conseguinte,

$$v(t_0 + T; x_{t_0+T}(t_0,\varphi)) \leq v(t_0,\varphi) - \gamma(t_0 + T - t_0) \leq \\ \xi(\|\varphi\|) - \gamma(t_0 + T - t_0) = \xi(\|\varphi\|) - \gamma T < M - \gamma T = M - \gamma\frac{M}{\gamma} = 0$$

Portanto, $v(t_0+T; x_{t_0+T}(t_0,\varphi)) < 0$. O que é impossível, pois $v(t,\varphi)$ é positivo-definido ($v(t_0+T; x_{t_0+T}(t_0,\varphi)) \geq 0$).

Então, se $\varphi \in C_\rho$, com $\rho = H_1$, implica $x_{\tilde{t}}(t_0,\varphi) \in C_\delta$, para algum $\tilde{t}, t_0 \leq \tilde{t} \leq t_0 + T$ e, portanto, pela estabilidade uniforme, dado $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < H_1, \exists \delta = \delta(\epsilon)$, tal que $\varphi \in C_\delta$ implica $x_t(t_0,\varphi) \in C_\epsilon$ para $t \geq t_0 + T$. ■

Teorema 19. *Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$, positivo-definido, radialmente ilimitado, tendo extremo superior infinitésimo e com $\dot{v}(t,\varphi)$ negativo-definido. Então, a solução $x = 0$ de (1.1) é globalmente assintoticamente estável.*

Prova: Como $v(t,\varphi)$ é positivo-definido e tem extremo superior infinitésimo, existem funções escalares contínuas $\omega_1(r), \xi(r)$, com $\omega_1(r) > 0, r > 0$ e $\xi(0) = 0$, de modo que $\omega_1(\|\varphi\|) \leq v(t,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|)$ para $t \geq 0, \varphi \in C_H$.

Como $v(t,\varphi)$ é radialmente ilimitada, existe uma função escalar contínua $\gamma(r)$ tal que $v(t,\varphi) \geq \gamma(\|\varphi\|)$ e $\gamma(r) \to \infty$, quando $r \to \infty$.

Definindo $\omega(r) = \max\{\omega_1(r), \gamma(r)\}$, temos que $\omega(r) > 0$ para $r > 0$, $\omega(r) \to \infty$, com $r \to \infty$ e $\omega(\|\varphi\|) \leq v(t,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|)$.

Então, dada qualquer constante positiva H_1, podemos encontrar H_2, tal que $\xi(H_1) < \omega(H_2)$, já que $\omega(r) \to \infty$, com $r \to \infty$ e ω é uma função contínua.

Assim C_{H_1} está contido no centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ para todo $H_1, \rho = H_1 = \infty$. Portanto, $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável. ■

Teorema 20. *Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$ definido em $[0,\infty) \times C_H$ e satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $\gamma(|\varphi(0)|) \leq v(t,\varphi) \leq \omega(\varphi), t \geq 0$ *e* $\varphi \in C_H$*, onde* $\omega(\varphi)$ *é um funcional em* C_H*, com* $\omega(0) = 0$ *e* $\gamma(r)$ *é uma função escalar contínua em* $[0, H)$*, com* $\gamma(r) > 0$ *para* $r > 0$*;*

(ii) $\dot{v}(t,\varphi) \leq 0, t \geq 0, \varphi \in C_H$.

Então, a solução $x = 0$ de (1.1) é uniformemente estável.

Prova: Dado $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < H_1$, seja $\delta = \delta(\epsilon)$, $0 < \delta < \epsilon$ escolhidos de modo que

$$\omega(\varphi) < \gamma(\epsilon), \tag{1.3}$$

para $\varphi \in C_\delta$. Essa desigualdade ocorre pela continuidade da funções ω e γ e $\omega(0) = 0$ em $\varphi \equiv 0$. Dado $\epsilon > 0$, sempre conseguimos $\gamma(\epsilon)$ de forma que essa desigualdade ocorra.

Então, $t_0 \geq 0, \varphi \in C_\delta$ implicam $v(t_0, \varphi) \leq \omega(\varphi) \overset{(1.3)}{<} \gamma(\epsilon)$.

Como, do Lema (3) e da hipótese (ii), segue que $v(t; x_t(t_0, \varphi))$ é não crescente, então $v(t; x_t(t_0, \varphi)) \leq v(t_0, \varphi) < \gamma(\epsilon)$ para $t \geq t_0$.

Afirmação: $x_t(t_0, \varphi) \in C_\epsilon$ para $t \geq t_0$.

De fato, pois caso contrário existiria $\bar{t} > t_0$ satisfazendo $|x_{\bar{t}}(t_0, \varphi)| = \epsilon$. Pela hipótese (i), teríamos

$$v(\bar{t}; x_{\bar{t}}(t_0, \varphi)) \geq \gamma(|x(\bar{t}; t_0, \varphi)|) = \gamma(\epsilon),$$

levando-nos a uma contradição, pois v é não crescente.

Assim, $\varphi \in C_\delta, t_0 \geq 0 \Rightarrow |x(t; t_0, \varphi)| < \epsilon$ para $t \geq t_0$.

Note que o $\delta(\epsilon)$ foi tomado segundo a continuidade da ω, independente de t_0.

Portanto, $x = 0$ é uniformemente estável. ■

Teorema 21. *Suponhamos que exista um funcional $v(t, \varphi)$ definido em $[0, \infty) \times C_H$ e satisfazendo a condição (i) do teorema (20). Suponhamos ainda que exista uma função escalar $\Gamma(r), r \geq 0$, positiva e contínua para $r > 0$ tal que $\dot{v}(t, x_t) \leq -\Gamma(|x(t)|)$, para toda solução $x(t)$ de (1.1). Suponhamos que $f(t, \varphi)$ seja limitada em $[0, \infty) \times C_H$. Então, a solução $x = 0$ de (1.1) é assintoticamente estável.*

Prova: Tomemos por conveniência $|x| = \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Sejam $H_1, H_2, 0 < H_1 < H_2 < H$, escolhidos de modo que se $\varphi \in C_{H_1}$, então $\omega(\varphi) < \gamma(H_2)$ (pela continuidade de ω e γ).

Do mesmo modo que na prova do teorema anterior, segue que se $\varphi \in C_{H_1}$, então $x_t(t_0, \varphi) \in C_{H_2}$, para $t \geq t_0 \geq 0$. Assim, pelo teorema (20), x é uniformemente estável. Logo, x é estável.

Para completar a demostração, é suficiente mostrar que se $\varphi \in C_{H_1}$ e $t_0 \geq 0$, então $x(t; t_0, \varphi) \to 0$, com $t \to \infty$.

Vamos provar por contradição. Suponhamos que existam $t_0 \geq 0$ e $\varphi \in C_{H_1}$ de modo que $x(t; t_0, \varphi)$ não tenda para zero com $t \to \infty$. Então, existe uma sequência crescente $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$, com $t_{m+1} - t_m > 2$ e $\eta > 0$ de modo que $|x(t_m; t_0, \varphi)| > \eta, \forall m$.

Afirmação: Existe $\beta > 0$ não dependendo de m, tal que $|x(t; t_0, \varphi)| > \frac{\eta}{2}$ para $|t_m - t| \leq \beta$.

De fato, seja $\sigma > 0$, satisfazendo $|f(t, \varphi)| \leq \sigma, \forall t \geq 0$ e para $\varphi \in C_H$, pois $f(t, \varphi)$ é limitada por hipótese.

Para cada t_m, considere o intervalo $(t_m - 1, t_m + 1)$ e, aplicando o Teorema do Valor Médio para $t \in (t_m - 1, t_m + 1)$ Temos:

$$|x_j(t_m; t_0, \varphi) - x_j(t; t_0, \varphi)| = |\dot{x_j}(\xi; t_0, \varphi)(t - t_m)| = \\ |f_j(\xi, x_\xi)||t_m - t| \leq \sigma |t_m - t|,$$

onde ξ é um número entre t_m e t.

Note que

$$|x_j(t_m; t_0, \varphi)| - |x_j(t; t_0, \varphi)| \leq |x_j(t_m; t_0, \varphi) - x_j(t; t_0, \varphi)| \leq \sigma |t_m - t| \\ \Longrightarrow |x_j(t_m; t_0, \varphi)| - \sigma |t_m - t| \leq |x_j(t; t_0, \varphi)|.$$

Assim,

$$|x_j(t; t_0, \varphi)| \geq x_j(t_m; t_0, \varphi)| - \sigma |t_m - t| > \eta - \sigma |t_m - t|.$$

Agora, tomando $\beta = \min\left\{\frac{\eta}{3\sigma}, 1\right\}$, temos

$$|x_j(t; t_0, \varphi)| \geq x_j(t_m; t_0, \varphi)| - \sigma |t_m - t| > \eta - \sigma \frac{\eta}{3\sigma} = \eta - \frac{\eta}{3} = \frac{2}{3}\eta > \frac{\eta}{2},$$

para $|t_m - t| \leq \beta$.

Observamos que β não depende de m. Então, $\frac{\eta}{2} < |x_j(t;t_0,\varphi)| \leq H_2$ para $|t_m - t| \leq \beta$ e isto acarreta que

$$\dot{v}(t;x_t(t_0,\varphi)) \leq -\Gamma(|x(t;t_0,\varphi)|) \leq \sup_{\frac{\eta}{2}\leq r\leq H_2}\{-\Gamma(r)\} = -q < 0.$$

Note também que como $t_{m+1} - t_m > 2$, temos para $m = 1$, que $t_2 - t_1 > 2$ e $\beta \leq 1 \Rightarrow t_1 + \beta < t_2 - \beta$. Daí, como $\dot{v} \leq 0$, segue pelo Lema (3) que

$$v(t_1+\beta, x_{t_1+\beta}(t_0,\varphi)) > v(t_2-\beta, x_{t_2-\beta}(t_0,\varphi)) \Rightarrow$$
$$v(t_1+\beta, x_{t_1+\beta}(t_0,\varphi)) - v(t_2-\beta, x_{t_2-\beta}(t_0,\varphi)) > 0.$$

Repetindo este argumento para $m = 2, ..., N$, obtemos

$$v(t_{N-1}+\beta, x_{t_{N-1}+\beta}(t_0,\varphi)) - v(t_N-\beta, x_{t_N-\beta}(t_0,\varphi)) > 0. \tag{1.4}$$

Portanto, pelos Lemas (3) e (14) e o fato de que $\beta \leq 1$ e $t_{m+1} - t_m > 2$, segue que $\forall n \in \mathbb{N}$, temos

$$0 \leq v(t_N+\beta, x_{t_N+\beta}(t_0,\varphi)) - v(t_1-\beta, x_{t_1-\beta}(t_0,\varphi)) \overset{(1.4)}{\leq}$$
$$\sum_{m=1}^{N}\left[v(t_m+\beta, x_{t_m+\beta}(t_0,\varphi)) - v(t_m-\beta, x_{t_m-\beta}(t_0,\varphi))\right] \overset{Lema(14)}{\leq}$$
$$\sum_{m=1}^{N} -q|t_m+\beta-t_m+\beta| = -2Nq\beta.$$

Por conseguinte, $v(t_N+\beta, x_{t_N+\beta}(t_0,\varphi)) \to -\infty$ quando $N \to \infty$, o que não é possível, pois $v(t,\varphi) \geq 0$ e segue o resultado. ∎

4 Aplicações

Aplicação 1. Mostremos que a solução nula da equação $\dot{x}(t) = -x(t)g(t,x_t)$, onde $g(t,\varphi) \geq 0$ é uniformemente estável.

Para isto, considere $v(t,\varphi) = [\varphi(0)]^2, \varphi \in C_H$.

Mostremos então, a validade das hipóteses do Teorema (20).

1. Afirmamos que $\dot{v}(t, \varphi) \leq 0$.

   Com efeito,

   $$\dot{v}(t, x_t) = [x_t(0)]^2 = [x(t+0)]^2 = [x(t)]^2.$$

   Assim,

   $$\dot{v}(t, x_t) = 2x(t)\dot{x}(t) = 2x(t)[-x(t)g(t, x_t)] = -2[x(t)]^2 g(t, x_t) \leq 0.$$

   Portanto, $\dot{v}(t, \varphi) \leq 0$.

2. Provemos que existe $\gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, onde $\gamma(r) > 0$ para $r > 0$ e existe $\omega(\varphi)$; $\omega : C_H \to \mathbb{R}$, onde $\omega(0) = 0$ tal que $\gamma(|\varphi(0)|) \leq v(t, \varphi) \leq \omega(\varphi)$.

   Basta definir $\gamma(r) = r^2, \forall r$.

   Mostremos que $v(t, \varphi) = [\varphi(0)]^2 \leq \omega(\varphi)$.

   De fato, considere $\omega(\varphi) = \|\varphi\|^2$.
   Como $\|\varphi\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)| \geq |\varphi(0)|$, temos $\|\varphi\|^2 \geq |\varphi(0)|^2$.
   Logo, $0 \leq [\varphi(0)]^2 \leq \|\varphi\|^2$.

Pelo teorema (20), concluímos que $x = 0$ é uniformemente estável.

Aplicação 2. Seja $b(t)$ uma função escalar contínua de modo que $|b(t)| \leq \sigma$, $t \geq 0$ e $0 \leq \tau = h < \infty$. Sejam H e a escolhidos de modo que $\sigma H < a$, com H e a sendo reais positivos. Então, a solução $x = 0$ da equação

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + b(t)x(t-\tau)x(t)$$

é assintoticamente estável e C_H está contido no centro de atração para todo $t_0 \geq 0$.

De fato, primeiramente, note que a solução $x = 0$ é uniformemente estável, pelo Teorema (20), pois $\gamma(|\varphi(0)|) \leq v(t, \varphi) \leq \omega(\varphi)$ e $\dot{v}(t, \varphi) \leq 0$ (basta tomar $\gamma(r) = r^2$, $v(t, \varphi) = [\varphi(0)]^2$ e $\omega(\varphi) = \|\varphi\|^2$, como na aplicação (1)).

E também que

$$|f(t,\varphi)| = |-\varphi(0)(a - b(t)\varphi(-\tau))| = |-\varphi(0)||a - b(t)\varphi(-\tau)| \leq$$
$$H(|a| + |-b(t)||\varphi(-\tau)|) \leq H(a - \sigma H).$$

Portanto, $f(t,\varphi)$ é limitada.

Afirmação: $\dot{v}(t,x_t) \leq -\gamma(|x(t)|)$. Para isto, defina $\gamma(r) = 2r^2(a-\sigma H)$ ($a > \sigma H$ e γ é contínua). Também $v(t,\varphi) = [\varphi(0)]^2 = [x_t(0)]^2 = x^2(t)$ e

$$\dot{v}(t,x_t) = 2x(t)\dot{x}(t) = 2x^2(t)(-a + b(t)x_t(-\tau)) = -2x^2(t)(a - b(t)x_t(-\tau)).$$

Basta mostrar que $|\dot{v}(t,x_t)| \geq \gamma$.

$$|\dot{v}(t,x_t)| = |-2x^2(t)(a - b(t)x_t(-\tau))| = |-2x^2(t)||a - b(t)x_t(-\tau)| \geq$$
$$|-2x^2(t)|(|a| - |b(t)||x_t(-\tau)|) \geq |-2x^2(t)|(a - \sigma H) = \gamma(|x(t)|).$$

Concluímos que $|\dot{v}| \geq \gamma$. Logo, pode ocorrer $|\dot{v}| \geq \gamma$ ou $|\dot{v}| \leq -\gamma$.

Mostremos que $\dot{v}(t,x_t) \leq 0$.

Para isto, basta mostrar que $a - b(t)x_t(-\tau) > 0$. De fato, $|b(t)x_t(-\tau)| \leq \sigma H < a, \forall t \geq 0$. Logo, o sinal de $a - b(t)x_t(-\tau)$ é igual ao sinal de a.

Portanto, $\dot{v}(t,x_t) \leq -\gamma(|x(t)|)$. Logo, $x = 0$ é assintoticamente estável, de acordo com o Teorema (21).

Agradecimentos: Agradeço a minha orientadora Marta Cilene Gadotti, por sua ajuda, dedicação e atenção e ao auxílio financeiro do Programa de Educação Tutorial (PET)–SESu/MEC, pelo apoio financeiro.

Abstract: We present some results on stability of differential equations with delay in relation to equilibrium point $x = 0$, based on the second method Lyapunoff and using reference [1].

Keywords: Delay; Lyapunoff; Stability.

Referências Bibliográficas

[1] Onuchic, N. *Equações Diferenciais com Retardamento*, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, Julho de 1971.

[2] Lima, E.L. *Curso de Análise*, Projeto Euclides, IMPA, 1992.

[3] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with applications*, John Wiley & Sons, 1978.

O Teorema de ponto fixo de Brouwer em dimensão um e algumas equivalências

Pollyane Vieira da Silva[1]

Orientador(a): Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis

Resumo: Nesse trabalho, estudamos o Teorema de ponto fixo de Brouwer para o intervalo e algumas equivalências.

Palavras-chave: função contínua, conjunto compacto, ponto fixo.

1 Introdução

A Teoria de ponto fixo é um ramo da Topologia que trata, em particular, da seguinte questão: dado um espaço topológico X e uma função contínua $f : X \to X$, sob quais condições é possível garantir a existência de um ponto fixo de f, isto é, de um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$?

Um resultado basilar em Teoria de ponto fixo, e talvez o mais famoso, é o Teorema de ponto fixo de Brouwer. Em linhas gerais, ele afirma que o cubo de dimensão n, $[0,1] \times \cdots \times [0,1] \subset \mathbb{R}^n$, possui a propriedade do ponto fixo. Isto é, para toda função contínua $f : [0,1] \times \cdots \times [0,1] \to [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ existe $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Nesse trabalho, trataremos apenas do Teorema de ponto fixo de Brouwer para o intervalo.

O trabalho está organizado do seguinte modo: na seção 2, apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares. Na seção 3, demonstramos que são equivalentes os seguintes teoremas:

Teorema 1 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ com $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$. Se um número c está entre $f(a)$ e $f(b)$, então há um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = c$.*

[1]Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET)-SESu/MEC

Teorema 2 (Teorema do Anulamento). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua com* $f(a) < 0 < f(b)$ *ou* $f(b) < 0 < f(a)$. *Então existe pelo menos um ponto* $x \in [a, b]$ *tal que* $f(x) = 0$.

Teorema 3 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). *Seja* $f : [a, b] \to [a, b]$ *uma função contínua. Então existe* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_0) = x_0$.

Por fim, na seção 4, apresentamos uma demonstração do Teorema de ponto fixo de Brouwer para intervalos e, como aplicação, apresentamos o Teorema de Borsuk–Ulam para a S^1.

2 Conceitos e resultados preliminares

Nesse trabalho, tratamos de funções f cujos domínio, D_f, e imagem, $Im(f)$, são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para tais funções temos a seguinte definição.

Definição 4. Dada uma função f e um ponto p de seu domínio, dizemos que f é contínua em p se:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ (\delta = \delta(p, \varepsilon))\ /\ x \in D_f,\ |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to X$ uma função, dizemos que $x \in X$ é um ponto fixo de f se $f(x) = x$.

Definição 5. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que X tem a Propriedade do Ponto Fixo (P.P.F.) se toda função contínua $f : X \to X$ tiver um ponto fixo, isto é, $f(x) = x$ para algum $x \in X$. O conjunto dos pontos fixos de f é denotado por

$$Fix(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}.$$

Definição 6. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n, um número real $x(n)$, o qual é comumente denotado por x_n.

Definição 7. Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $L \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ /\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Definição 8. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que X é compacto se toda sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de pontos de X contém uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ convergindo para algum ponto x do mesmo conjunto X.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, denotamos por $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ o conjunto dos números reais que estão entre os números a e b, inclusive estes. Esse conjunto é chamado o intervalo fechado com extremos a e b.

O corpo dos números reais satisfaz a seguinte propriedade:

Princípio dos Intervalos Encaixantes: Seja $(I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots)$ uma sequência de intervalos fechados tal que cada intervalo encontra-se dentro do anterior, com os comprimentos tendendo a zero quando n tende ao infinito. Então a intersecção de todos esses intervalos fechados contém um único ponto x_0.

Como consequência do Princípio dos Intervalos Encaixantes, temos o seguinte resultado.

Teorema 9. *Todo intervalo $I_0 = [a,b]$ de $\mathbb{R}$ é compacto.*

Prova: Seja (x_n) uma sequência de pontos de $[a,b]$. Divida o intervalo $[a,b]$ na metade. Pelo menos uma das metades contém infinitos pontos da sequência (x_n). Chame uma tal metade por I_1 e escolha um ponto x_{n_1} da sequência (x_n) que esteja em I_1. Agora, divida o intervalo I_1 na metade. Novamente, uma dessas metades deve conter uma infinidade de pontos da sequência (x_n). Tome uma tal metade e chame-a por I_2. Escolha um ponto x_{n_2} da sequência (x_n) que esteja em I_2. Por indução, obtemos uma sequência de intervalos fechados encaixados,

$$I_0 = [a,b] \supset I_1 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots$$

O comprimento do intervalo I_k é igual a $\dfrac{b-a}{2^k}$ e, para cada k, foi escolhido um ponto x_{n_k} da sequência (x_n) no intervalo I_k. Os comprimentos desses intervalos I_k's tendem a zero quando k tende a infinito. Assim, pelo Princípio dos Intervalos Encaixantes, há um único ponto $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$. Note que, em particular, $x_0 \in [a,b]$.

Vamos provar que a subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ da sequência (x_n) converge para x_0.

Tome $\varepsilon > 0$ arbitrário. Então, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{b-a}{2^m}\right| < \varepsilon$. Agora, para todo $k \geqslant m$, tem-se

$$\frac{b-a}{2^k} \leqslant \frac{b-a}{2^m}.$$

Assim, dado $k \geqslant m$, como x_0, $x_{n_k} \in I_k$, temos $|x_0 - x_{n_k}| < \dfrac{b-a}{2^k} < \varepsilon$. Isso prova que a sequência x_{n_k} converge para o ponto x_0.

Logo o intervalo I_0 é compacto. ■

Finalizamos essa seção com o seguinte resultado sobre funções contínuas.

Teorema 10. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua então f é limitada superior e inferiormente, isto é, existem números m e M tais que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, para todo $x \in [a,b]$.*

Prova: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Vamos provar que a função f é limitada superiormente, ou seja, que existe um número M tal que $f(x) \leqslant M$, para todo $x \in [a,b]$. Se não existir um tal número M, existem pontos $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) > 1$, $x_2 \in [a,b]$ tal que $f(x_2) > 2$, $\ldots$, $x_n \in [a,b]$ tal que $f(x_n) > n$, etc. Como um intervalo fechado é compacto, uma sequência de pontos (x_{n_k}) pode ser escolhida a partir da sequência (x_n) de modo que convirja para algum ponto x_0 de $[a,b]$. Como a função f é contínua no ponto x_0, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

sempre que $x \in [a,b]$ e $|x - x_0| < \delta$.

Tome $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

1. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_0) + \dfrac{1}{2} < N$.

2. Seja $\delta > 0$ tal que

$$x \in [a,b],\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}.$$

3. Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - x_0| < \delta$.

Assim, tomando $k > k_0$ tal que $n_k > N$, temos:

$$f(x_{n_k}) < f(x_0) + \frac{1}{2} < N < n_k,$$

contradizendo o fato de que $f(x_{n_k}) > n_k$.

Logo, f é limitada superiormente.

Analogamente, prova-se que f é limitada inferiormente. ■

3 Teoremas equivalentes

Nessa seção, demonstraremos que os teoremas de ponto fixo de Brouwer em dimensão um, do Valor Intermediário e do Anulamento são equivalentes. Para tal, demonstraremos as seguintes implicações:

$$\begin{tikzcd}
& \text{Teorema de ponto fixo de Brouwer} \arrow[dr, Rightarrow, "(1)"] & \\
\text{Teorema do Anulamento} \arrow[ur, Rightarrow, "(3)"] & & \text{Teorema do Valor Intermediário} \arrow[ll, Rightarrow, "(2)"]
\end{tikzcd}$$

(1) Teorema de ponto fixo de Brouwer $\Rightarrow$ Teorema do Valor Intermediário

Prova: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e, sem perda de generalidade, suponha $f(a) < f(b)$. Seja c um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Vamos construir uma função $F : [a, b] \to [a, b]$ tal que $f(x) = c$ se, e somente se, $F(x) = x$. A função F terá a forma $F(x) = \lambda(f(x) - c) + x$, para algum $\lambda \neq 0$.

Encontrando λ:

1. Seja $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x) < c$ para todo $a \leqslant x \leqslant x_1$ (existe pois $f(a) < c$ e f é contínua);

2. Seja $x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x) > c$ para todo $x_2 \leqslant x \leqslant b$ (existe pois $f(b) > c$ e f é contínua);

3. Existem m e M tais que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, para todo $a \leqslant x \leqslant b$.

Tomemos

$$\lambda = \max\left\{\frac{a - x_1}{M - c}, \frac{b - x_2}{m - c}\right\}.$$

Note que λ é negativo. Provemos que $a \leqslant F(x) \leqslant b$, para todo $x \in [a, b]$.

i) $F(x) \geqslant a$: Suponhamos $f(x) \geqslant c$, então $f(x) - c \geqslant 0$ e $x > x_1$. Assim

$$\lambda \cdot (f(x) - c) + x \geqslant \frac{(a - x_1) \cdot (f(x) - c)}{M - c} + x \geqslant a - x_1 + x \geqslant a.$$

Suponhamos $f(x) < c$, então $f(x) - c < 0$. Como $\lambda < 0$, temos

$$\lambda \cdot (f(x) - c) > 0.$$

Assim $\lambda \cdot (f(x) - c) + x > x \geqslant a$. Logo, $F(x) = \lambda \cdot (f(x) - c) + x \geqslant a$, para todo x.

ii) $F(x) \leqslant b$: Suponhamos $f(x) \geqslant c$, então $f(x) - c \geqslant 0$. Como $\lambda < 0$, temos

$$\lambda \cdot (f(x) - c) \leqslant 0.$$

Assim, $\lambda \cdot (f(x) - c) + x \leqslant x \leqslant b$.

Suponhamos $f(x) < c$, então $f(x) - c < 0$ e $x < x_2$. Assim

$$\lambda(f(x) - c) + x \leqslant \frac{(b - x_2) \cdot (f(x) - c)}{m - c} + x \leqslant b - x_2 + x \leqslant b.$$

Logo, $F(x) = \lambda \cdot (f(x) - c) + x \leqslant b$, para todo $x \in [a, b]$.

Portanto, $a \leqslant F(x) \leqslant b$, para todo $x \in [a, b]$. ■

(2) Teorema do Valor Intermediário ⇒ Teorema do Anulamento

Prova: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, então 0 está entre $f(a)$ e $f(b)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$. ■

(3) Teorema do Anulamento ⇒ Teorema de ponto fixo de Brouwer

Prova: Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x - f(x)$. Se $g(a) = 0$ ou $g(b) = 0$, está demonstrado. Caso contrário, temos $g(a) = a - f(a)$ e, como $a < f(a) \leqslant b$, segue que $g(a) < 0$. Por outro lado, $g(b) = b - f(b)$ e, como $a \leqslant f(b) < b$, segue que $g(b) > 0$. Pelo Teorema do Anulamento, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$, isto é, $x_0 = f(x_0)$. Portanto, x_0 é um ponto fixo de f. ■

4 Demonstração do Teorema de ponto fixo de Brouwer

Prova: Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ não há nada a fazer. Assim, consideremos o caso em que $f(a) > a$ e $f(b) < b$.

Divida o intervalo $I_0 = [a, b]$ ao meio e seja $c = \dfrac{b + a}{2}$ o ponto médio desse intervalo. Se $f(c) = c$, o teorema está demonstrado. Caso contrário, teremos $f(c) < c$ ou $f(c) > c$. Se $f(c) < c$, tome por $I_1 = [a, c]$. Se $f(c) > c$, tome por $I_1 = [c, b]$.

Divida o intervalo I_1 ao meio através de seu ponto médio, que denotaremos por d. Caso $f(d) = d$, o teorema está demonstrado. Caso contrário, temos $f(d) < d$ ou $f(d) > d$.

Tome o extremo x do intervalo I_1 tal que

$$(f(d) - d)(f(x) - x) < 0.$$

Definimos indutivamente o intervalo I_j a partir do intervalo I_{j-1} seguindo o procedimento:

- Se o ponto médio de I_{j-1} é um ponto fixo de f, o teorema está demonstrado.
- Caso contrário, tome I_j como sendo o intervalo determinado pelo ponto médio de I_{j-1} e pelo extremo do intervalo I_{j-1} onde a função $f(x) - x$ assume sinal oposto ao que assume no ponto médio de I_{j-1}.

Com esse processo, ou algum ponto médio desses intervalos é ponto fixo de f ou obtemos uma sequência de intervalos fechados encaixados com comprimento tendendo a zero. Nesse último caso, temos $\bigcap_{j=0}^{\infty} I_j = \{x_0\}$. Afirmamos que $f(x_0) = x_0$. De fato, suponha o contrário, isto é, $f(x_0) \neq x_0$. Então $f(x_0) < x_0$ ou $f(x_0) > x_0$. Sem perda de generalidade, suponha $f(x_0) < x_0$. Da continuidade da função $g(x) = f(x) - x$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) - x < 0$ para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$. Temos que o intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ possui diâmetro $\dfrac{1}{2^n}$ e que $x_0 \in I_n$. Logo $I_n \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ e, portanto, $f(x) - x < 0$ para todo $x \in I_n$. Mas o intervalo I_n foi construído de modo que $f(a_n) - a_n$ e $f(b_n) - b_n$ possuíssem sinais opostos, uma contradição.

Logo, $f(x_0) = x_0$. ■

Agora, como uma aplicação do Teorema de ponto fixo de Brouwer apresentamos o Teorema de Borsuk–Ulam para a S^1. Para isso precisamos das seguintes definições:

Definição 11. Chamamos de circunferência de centro O e raio 1 o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + y^2 = 1$. Denotamos esse conjunto por S^1.

Definição 12. Dois pontos $x, y \in S^1$ são chamados pontos antípodas se $x = -y$.

Teorema 13 (Teorema de Borsuk–Ulam). *Seja $f : S^1 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe um ponto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$, i.e., ao menos um par de pontos antípodas possui mesma imagem.*

Prova: Dado $x \in S^1$, existe um único número $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $x = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$. O número α é chamado de coordenada angular de x. Note que se $x \in S^1$ e se $x = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$ então $-x = (\cos(\alpha+\pi), \operatorname{sen}(\alpha+\pi))$.

Considere a função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(\alpha) = f(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)) - f(\cos(\alpha + \pi), \operatorname{sen}(\alpha + \pi)).$$

Note que $g(0) = f((1, 0)) - f((-1, 0))$ e que $g(\pi) = f((-1, 0)) - f((1, 0))$. Assim, $g(0) = -g(\pi)$.

Se $g(0) = 0$, conclui-se que $f((1, 0)) = f((-1, 0))$ e, assim, o teorema está demonstrado. Caso contrário, temos que $g(0)$ e $g(\pi)$ possuem sinais opostos. Logo, pelo Teorema do Anulamento, existe $\alpha_0 \in [0, \pi]$ tal que $g(\alpha_0) = 0$ e, portanto, para $x_0 = (\cos(\alpha_0), \operatorname{sen}(\alpha_0)) \in S^1$ tem-se $f(x_0) - f(-x_0) = 0$, o que implica $f(x_0) = f(-x_0)$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Shashkin, Yu. A., *Fixed points.* Traduzido do Russo por Viktor Minachin. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematical Association of America, Washington, DC, 1991.

Homotopia

Taís Roberta Ribeiro[1]

Orientador(a): Prof. Dr. João Peres Vieira

Resumo: Neste trabalho introduziremos o conceito de aplicações homotópicas, tipo de homotopia e espaços contráteis, bem como apresentaremos vários exemplos e resultados.

Palavras-chave: Aplicações Homotópicas; Tipo de Homotopia; Espaços Contráteis

1 Aplicações Homotópicas

Definição 1. Duas funções contínuas $f, g : Y \longrightarrow X$ dizem-se homotópicas quando existe uma aplicação contínua $F : Y \times I \longrightarrow X$ tal que $F(y, 0) = f(y)$ e $F(y, 1) = g(y)$ para todo $y \in Y$. A aplicação F chama-se uma homotopia entre f e g e escrevemos $f \simeq g$ ou $F : f \simeq g$.

Se f é homotópica a uma função constante, dizemos que ela é nulohomotópica.

Algumas vezes, é conveniente usar uma notação diferente para F, e escrever, para $y \in Y$ e $t \in I$, $f_t(y) = F(y, t)$.

Temos assim, $f_0 = f, f_1 = g$ e $f_t : Y \longrightarrow X$ é uma função contínua, pois $f_t = F \circ i_t$, onde $i_t : Y \longrightarrow Y \times I$, dada por $i_t(y) = (y, t)$ e F são contínuas.

Lema 2. *Homotopia é uma relação de equivalência entre as funções contínuas $Y \longrightarrow X$.*

Prova: i) $f \simeq f$, pois $F : Y \times I \longrightarrow X$, dada por $F(y, t) = f(y), \forall (y, t) \in Y \times I$ é contínua, uma vez que $F = f \circ p_1$ onde $p_1 : Y \times I \longrightarrow Y$ dada por $p_1(y, t) = y$ e f são contínuas.

[1]Bolsista FAPESP - Processo 2013/04570-6

ii) $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$.

Seja $F : f \simeq g$. A função $R_y : Y \times I \longrightarrow Y \times I$, dada por $R_y(y,t) = (y, 1-t)$ é contínua, pois suas funções componentes são contínuas.

Agora, $F \circ R_y : g \simeq f$, pois ela é contínua, como composta de contínuas, $F \circ R_y(y,0) = F(y,1) = g(y)$ e $F \circ R_y(y,1) = F(y,0) = f(y)$.

iii) $f \simeq g$ e $g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$.

Sejam $F : f \simeq g$ e $G : g \simeq h$. Definimos uma função $F*G : Y \times I \longrightarrow X$ por:

$$F * G(y,t) = \begin{cases} F(y,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(y,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como para $t = \frac{1}{2}, F(y,1) = g(y) = G(y,0)$ e F, G são contínuas, segue pelo Teorema da Colagem que $F * G$ é contínua.

Ainda, $F * G(y,0) = F(y,0) = f(y)$ e $F * G(y,1) = G(y,1) = h(y)$.

Portanto, $F * G : f \simeq h$. ■

Classes de equivalência para relação de homotopia são chamadas classes de homotopia. Escrevemos $[Y, X]$ para o conjunto de classes de homotopia das funções contínuas $f : Y \longrightarrow X$ e $[f]$ para as classes de equivalência contendo f.

Lema 3. *Sejam $h : Z \longrightarrow Y$, $g_0, g_1 : Y \longrightarrow X$ e $f : X \longrightarrow W$ funções contínuas. Se $g_0 \simeq g_1$, então $g_0 \circ h \simeq g_1 \circ h$ e $f \circ g_0 \simeq f \circ g_1$.*

Prova: Seja $G : g_0 \simeq g_1$. Então, $f \circ G : f \circ g_0 \simeq f \circ g_1$, pois ela é contínua ($f$ e G são contínuas) e ainda, $f \circ G(y,0) = f(G(y,0)) = f(g_0(y)) = f \circ g_0(y)$ e $f \circ G(y,1) = f(G(y,1)) = f(g_1(y)) = f \circ g_1(y)$.

Agora definimos $h \times 1 : Z \times I \longrightarrow Y \times I$ por $h \times 1(z,t) = (h(z), t)$. Esta função é contínua, pois suas componentes são contínuas. Então $G \circ (h \times 1) : g_0 \circ h \simeq g_1 \circ h$, pois, sendo composta de funções contínuas, ela é contínua e ainda, $G \circ (h \times 1)(z,0) = G((h \times 1)(z,0)) = G(h(z),0) = g_0(h(z)) = g_0 \circ h(z)$ e $G \circ (h \times 1)(z,1) = G(h(z),1) = g_1(h(z)) = g_1 \circ h(z)$. ■

Corolário 4. *Se* $g_0 \simeq g_1 : Y \longrightarrow X$ *e* $f_0 \simeq f_1 : X \longrightarrow W$*, então* $f_0 \circ g_0 \simeq f_1 \circ g_1 : Y \longrightarrow W$*.*

Prova: Como estamos dentro das hipóteses do Lema 3, temos $f_0 \circ g_0 \simeq f_0 \circ g_1 \simeq f_1 \circ g_1$. Assim, pela transitividade, $f_0 \circ g_0 \simeq f_1 \circ g_1$. ■

Este corolário mostra que a classe de homotopia $[f \circ g]$ depende somente das classes de homotopia $[f]$ e $[g]$. Podemos, então, definir a composição de classes de homotopia por $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

Sendo assim, observamos que a função $F : [X, W] \times [Y, X] \longrightarrow [Y, W]$, dada por $F([f], [g]) = [f \circ g]$ está bem definida. De fato,sejam $([f_1], [g_1]) = ([f_2], [g_2]) \in [X, W] \times [Y, X]$. Então, $[f_1] = [f_2]$ e $[g_1] = [g_2] \Leftrightarrow f_1 \simeq f_2$ e $g_1 \simeq g_2$. Logo, pelo Corolário 4, $f_1 \circ g_1 \simeq f_2 \circ g_2 \Leftrightarrow [f_1 \circ g_1] = [f_2 \circ g_2]$.

Denotando 1_U a função identidade do espaço U, temos o seguinte:

Lema 5. *Sejam* $h : Z \longrightarrow Y$*,* $g : Y \longrightarrow X$ *e* $f : X \longrightarrow W$*. Então,* $[g] \circ [1_Y] = [g] = [1_X] \circ [g]$ *e* $([f] \circ [g]) \circ [h] = [f] \circ ([g] \circ [h])$*.*

Prova: Temos que:

$$[g] \circ [1_Y] = [g \circ 1_Y] = [g] \ (1) \qquad [1_X] \circ [g] = [1_X \circ g] = [g] \ (2)$$

De (1) e (2), temos $[g] \circ [1_Y] = [g] = [1_X] \circ [g]$.

Agora, $([f] \circ [g]) \circ [h] = [f \circ g] \circ [h] = [(f \circ g) \circ h] = [f \circ (g \circ h)] = [f] \circ [g \circ h] = [f] \circ ([g] \circ [h])$ ■

Observação 6. $x \sim y \Leftrightarrow \exists\ \alpha : I \longrightarrow X$ contínua / $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.

$\overline{x} = \{y \in X \ / \ y \sim x\}$, $X = \bigcup_{x \in X} \overline{x}$.

$z, y \in \overline{x} \Rightarrow z \sim x$ e $x \sim y \Rightarrow z \sim y \Rightarrow \exists\ \alpha : I \longrightarrow X$ contínua, tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. Portanto, $\overline{x}$ é conexo por caminho e é chamado uma componente conexa por caminho do espaço X.

1.1 Exemplos de Aplicações Homotópicas

Exemplo 7. Duas aplicações constantes $f, g : X \longrightarrow Y$, dadas por $f(x) = p$ e $g(x) = q$, são homotópicas se, e somente se, p e q pertencem a mesma componente conexa por caminho do espaço Y.

Prova: ($\Rightarrow$) Por hipótese, as funções constantes f e g são homotópicas, então existe uma função contínua $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(x,0) = f(x) = p$ e $H(x,1) = g(x) = q$, $\forall\ x \in X$. Fixando, arbitrariamente, $x_0 \in X$, defina $\alpha : I \longrightarrow Y$ por $\alpha(t) = H(x_0, t)$. Então, α é contínua, $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Assim, $p \sim q$ e, portanto, $p,\ q \in \overline{p} = \overline{q}$.

($\Leftarrow$) Se p e q pertencem a mesma componente conexa por caminho do espaço Y, digamos $\overline{y}$, então $p \sim y$ e $y \sim q$, isto é, $p \sim q$. Assim, existe $\alpha : I \longrightarrow Y$ contínua, tal que, $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$.

Defina $H : X \times I \longrightarrow Y$ por $H(x,t) = \alpha(t)$, $\forall\ x \in X$. Então, H é contínua, $H(x,0) = \alpha(0) = p = f(x)$ e $H(x,1) = \alpha(1) = q = g(x)$. Portanto, as aplicações constantes f e g são homotópicas. ■

Como uma consequência, temos que $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, dadas por $f(x) = 1$ e $g(x) = -1$, não são homotópicas, pois 1 e -1 pertencem a componentes conexas distintas de $\mathbb{R} - \{0\}$, a saber, $]0, +\infty[$ e $]-\infty, 0[$, respectivamente.

Exemplo 8. Seja $Y \subset E$, onde E é uma espaço vetorial normado. Dadas as aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow Y$, suponhamos que, para todo $x \in X$, o segmento de reta $[f(x), g(x)]$ esteja contido em Y. Então, $f \simeq g$.

Prova: De fato, defina $H : X \times I \longrightarrow Y$ por $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Então, H é contínua, $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$. ■

Exemplo 9. Como um caso particular, temos que duas aplicações contínuas quaisquer $f, g : X \longrightarrow E$ são homotópicas. Em particular, toda aplicação contínua $f : X \longrightarrow E$ é homotópica à aplicação constante nula, pela homotopia $H(x,t) = (1-t)f(x)$.

Exemplo 10. Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária n-dimensional. Dadas duas aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow S^n$, com $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$, isto é, $f(x)$ e $g(x)$ nunca são pontos antípodas. Então, $f \simeq g$.

Prova: De fato, nestas condições, temos $(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0$, para todo $t \in I$ e $x \in X$, pois se $(1-t)f(x) + tg(x) = 0$ para alguns $t \in I$ ou $x \in X$, então $(1-t)f(x) = -tg(x)$. Assim, $||(1-t)f(x)|| = ||-tg(x)||$, ou seja, $|1-t|.||f(x)|| = |-t|.||g(x)||$ e, portanto, $1-t = t$, isto é, $t = \frac{1}{2}$. Logo, $(1-\frac{1}{2})f(x) + (\frac{1}{2})g(x) = 0$, ou seja, $f(x) = -g(x)$, para algum $x \in X$, o que é um absurdo.

Então, defina $H : X \times I \longrightarrow S^n$ por $H(x,t) = \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{||(1-t)f(x)+tg(x)||}$. Assim, H é contínua, $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$. ∎

Casos particulares:

a) Se $f : S^n \longrightarrow S^n$ não possui pontos fixos, isto é, $f(x) \neq x$, para todo $x \in S^n$, então f é homotópica à aplicação antípoda $a : S^n \longrightarrow S^n$ dada por $a(x) = -x$, pois $f(x) \neq -a(x)$.

b) Se $f : S^n \longrightarrow S^n$ é tal que $f(x) = -x$ para todo $x \in S^n$, então f é homotópica à aplicação identidade de S^n, pois $f(x) \neq -id(x)$.

Exemplo 11. Se n é ímpar, então a aplicação antípoda $a : S^n \longrightarrow S^n$, dada por $a(x) = -x$, é homotópica à identidade.

Prova: Seja $n = 2k-1$. Então, $S^n \subset \mathbb{R}^{2k}$ e podemos considerar $S^n = \{z = (z_1, ..., z_k) \in \mathbb{C}^k \ / \ |z_1|^2 + ... + |z_k|^2 = 1\}$.

Para cada número complexo $u \in S^1$ e cada $z = (z_1, ..., z_k) \in S^n$ defina $u.z$ por $u.z = (uz_1, ..., uz_k)$. Então, $u.z \in S^n$, pois $|u.z_1|^2 + ... + |u.z_k|^2 = |u|^2.|z_1|^2 + ... + |u|^2.|z_k|^2 = |z_1|^2 + ... + |z_k|^2 = 1$.

Defina $H : S^n \times I \longrightarrow S^n$ por $H(z,t) = e^{i(1-t)\pi}.z$. Então, H é contínua, $H(z,0) = e^{i\pi}.z = (\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)z = -z = \mathrm{a}(z)$ e $H(z,1) = e^0.z = z = id(z)$. ∎

Exemplo 12 (Relação entre homotopia e campos de vetores nas esferas). Um campo contínuo de vetores tangentes em S^n é uma aplicação contínua $v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $< x, v(x) >= 0$, para todo $x \in S^n$. Mostraremos, agora, que se existir um campo contínuo de vetores não nulos em S^n, então, a aplicação antípoda $a : S^n \longrightarrow S^n$ é homotópica a identidade.

Prova: Dado $v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ contínua, tangente e não nula em todos os pontos, defina $f : S^n \longrightarrow S^n$ por $f(x) = \frac{x+v(x)}{||x+v(x)||}$. Observe que $x +$

$v(x) \neq \overrightarrow{0}$, pois, caso contrário, $v(x) = -x$ e portanto, $0 =< x, v(x) >=< x, -x >= - < x, x >= -||x||^2$, ou seja, $x = \overrightarrow{0}$, o que é um absurdo, pois $x \in S^n$.

Como $x + v(x) \neq x$, para todo $x \in S^n$, pois $v(x) \neq \overrightarrow{0}$ para todo $x \in S^n$, segue que $f(x) \neq x$ para todo $x \in S^n$. Logo, pelo Exemplo 10 ítem a), temos que $f \simeq a$.

Por outro lado, f é homotópica a identidade de S^n. Para ver isto, basta definir $H : S^n \times I \longrightarrow S^n$ por $H(x,t) = \frac{x+tv(x)}{||x+tv(x)||}$. Desde que, $||x + tv(x)|| \geq 1, \ \forall \ x \in S^n$ e $\forall \ t \in I$, segue que, H é contínua, $H(x, 0) = x = id(x)$ e $H(x, 1) = \frac{x+v(x)}{||x+v(x)||} = f(x)$. Assim, $id \simeq f$. Logo, por transitividade, $id \simeq a$ e, por simetria, $a \simeq id$. ■

2 Tipo de Homotopia

Definição 13. Uma função contínua $f : Y \longrightarrow X$ é uma equivalência de homotopia quando existe $e : X \longrightarrow Y$ contínua, tal que $[f] \circ [e] = [1_X]$ e $[e] \circ [f] = [1_Y]$, ou equivalentemente, $f \circ e \simeq 1_X$ e $e \circ f \simeq 1_Y$.

Chamamos, então, e de inverso homotópico de f.

Além disso, nestas condições, as funções: $\psi : [Z, Y] \longrightarrow [Z, X], \ [h] \longmapsto [f] \circ [h]$ e $\varepsilon : [Z, X] \longrightarrow [Z, Y], \ [k] \longmapsto [e] \circ [k]$ são bijetoras, pois $\psi \circ \varepsilon[k] = \psi([e] \circ [k]) = [f] \circ ([e] \circ [k]) = ([f] \circ [e]) \circ [k] = [1_X] \circ [k] = [1_X \circ k] = [k]$ e $\varepsilon \circ \psi[h] = \varepsilon([f] \circ [h]) = [e] \circ ([f] \circ [h]) = ([e] \circ [f]) \circ [h] = [1_Y] \circ [h] = [1_Y \circ h] = [h]$.

Similarmente, há bijeção entre $[Y, W]$ e $[X, W]$, a saber, $[Y, W] \longrightarrow [X, W]$, dada por $[g] \longmapsto [g] \circ [e]$ e $[X, W] \longrightarrow [Y, W]$, dada por $[m] \longmapsto [m] \circ [f]$.

Portanto, podemos reconhecer os espaços X e Y como equivalentes e dizemos neste caso que X e Y tem o mesmo tipo de homotopia.

Exemplo 14. Sejam $Y = S^{p-1} \subset \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{p+q}$ e X o subconjunto de $\mathbb{R}^{p+q}$ de pontos não pertencentes ao plano $x_1 = \cdots = x_p = 0$. Então, a inclusão $f : Y \longrightarrow X$, dada por $f(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$, é uma equivalência de homotopia, pois $e : X \longrightarrow Y$, definida por,

$$e(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{\sum x_i^2}}, \ldots, \frac{x_p}{\sqrt{\sum x_i^2}}, 0, \ldots, 0 \right)$$

é a inversa homotópica de f.

Prova: De fato:

i) $e \circ f(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) = e(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) = (\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_p^2}}, \ldots, \frac{x_p}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_p^2}}, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$, pois, para qualquer $(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) \in Y$, $x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 1$. Assim, $e \circ f = 1_Y$.

ii) $f \circ e(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) = f(\frac{x_1}{\sqrt{\sum x_i^2}}, \ldots, \frac{x_p}{\sqrt{\sum x_i^2}}, 0, \ldots, 0) = (\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_p^2}}, \frac{x_p}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_p^2}}, 0, \ldots, 0)$ é homotópico à 1_X, pois $H : X \times I \longrightarrow X$ dada por $H((x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}), t) = ((x_1^2 + \cdots + x_p^2)^{\frac{t-1}{2}} x_1, \ldots, (x_1^2 + \cdots + x_p^2)^{\frac{t-1}{2}} x_p, tx_{p+1}, \ldots, tx_{p+q})$ é uma homotopia entre $f \circ e$ e 1_X, visto que H é contínua.
$H((x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}), 0) = (\frac{x_1}{\sqrt{\sum x_i^2}}, \ldots, \frac{x_p}{\sqrt{\sum x_i^2}}, 0, \ldots, 0) = f \circ e(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ e $H((x_1, \ldots, x_{p+q}), 1) = (x_1, \ldots, x_{p+q}) = 1_X(x_1, \ldots, x_{p+q})$. Assim, X e Y tem o mesmo tipo de homotopia. ■

3 Espaços Contráteis

Um espaço X é contrátil quando ele tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Proposição 15. *X é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade $1_X : X \longrightarrow X$ é homotópica a uma aplicação constante $c : X \longrightarrow X$.*

Prova: ($\Rightarrow$) Se $f : X \longrightarrow \{p\}$ é uma equivalência homotópica e $g : \{p\} \longrightarrow X$ é a inversa homotópica de f, então $g \circ f = 1_X$, mas $g \circ f$ é uma aplicação constante.

($\Leftarrow$) Se 1_X é homotópica a uma constante $c : X \longrightarrow X$, digamos dada por $c(x) = p \in X$, mostremos que X tem o mesmo tipo de homotopia de

p. De fato, definamos $f : X \longrightarrow \{p\}$ por $f(x) = p$ e $g : \{p\} \longrightarrow X$ por $g(p) = p$. Então, g é inversa homotópica de f, pois $f \circ g(p) = f(p) = p = 1_{\{p\}}(p) \simeq 1_{\{p\}}(p)$ e $g \circ f(x) = g(p) = p = c(x) \simeq 1_X(x)$. Portanto, X tem o mesmo tipo de homotopia de p, isto é, X é contrátil. ∎

Corolário 16. *Um espaço contrátil X é conexo por caminho.*

Prova: Sejam $p,\ q \in X$ quaisquer. Devemos exibir uma aplicação $\alpha : I \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Pela Proposição 15, como X é contrátil, $1_X \simeq c_1$, onde $c_1 : X \longrightarrow X$ é dada por $c_1(x) = p$, e também $1_X \simeq c_2$, onde $c_2 : X \longrightarrow X$ é dada por $c_2(x) = p$.

Logo, pela transitividade, c_1 e c_2 são homotópicas, ou seja, existe $H : X \times I \longrightarrow X$ contínua, tal que, $H(x, 0) = p$ e $H(x, 1) = q$.

Defina $\alpha : I \longrightarrow X$ por $\alpha(t) = H(x_0, t)$ observe que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Portanto, X é conexo por caminhos. ∎

Proposição 17. *Se X ou Y é contrátil, então, toda aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ é homotópica a uma função constante.*

Prova:

i) Se X for contrátil, então, 1_X é homotópica a uma função constante $c : X \longrightarrow X$, dada por $c(x) = p$. Assim, de $1_X \simeq c$, segue que, $f = f \circ 1_X \simeq f \circ c$, para toda $f : X \longrightarrow Y$ contínua, ou seja, desde que $f \circ c$ é constante, temos que f é homotópica a uma constante.

ii) Se Y for contrátil, então, $1_Y \simeq d$, onde $d : Y \longrightarrow Y$ é dada por $d(y) = q$. Assim, $f = 1_Y \circ f \simeq d \circ f$ para toda $f : X \longrightarrow Y$ contínua. Desde que, $d \circ f$ é constante, temos que f é homotópica a uma constante. ∎

Corolário 18. *Se X é contrátil e Y é conexo por caminho, então duas funções contínuas quaisquer $f, g : X \longrightarrow Y$ são homotópicas.*

Prova: Como X é contrátil, segue da Proposição 17 que $f \simeq c_1$ e $g \simeq c_2$, onde $c_1, c_2 : X \longrightarrow Y$ são tais que $c_1(x) = p \in Y$ e $c_2(x) = q \in Y$. Como Y

é conexo por caminho, então existe $\alpha : I \longrightarrow Y$ contínua tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$.

Defina $H \times I \longrightarrow Y$ por $H(x,t) = \alpha(t)$. Observe que H é contínua, $H(x,0) = p = c_1(x)$ e $H(x,1) = q = c_2(x)$. Logo, $c_1 \simeq c_2$. Portanto, pela transitividade, $f \simeq g$. ■

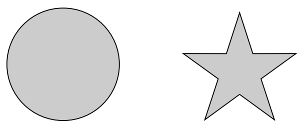
Corolário 19. *Se Y é contrátil, então, qualquer que seja X, $f, g : X \longrightarrow Y$ são homotópicas.*

Prova: Como Y é contrátil, pela Proposição 17, $f \simeq c_1$ e $g \simeq c_2$, onde $c_1, c_2 : X \longrightarrow Y$ são dadas por $c_1(x) = p \in Y$ e $c_2(x) = q \in Y$. Pelo Corolário 16, Y é conexo por caminho e de forma análoga ao que foi feito na demonstração do Corolário 18, $c_1 \simeq c_2$. Portanto, pela transitividade, $f \simeq g$. ■

Definição 20. Um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ é convexo se para todo par de pontos $x, y \in X$ o segmento de reta $[x, y]$ está contido em X.

Definição 21. Um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ é estrelado se existe $p \in X$ tal que o segmento $[p, x] \subset X$, $\forall\, x \in X$.

Exemplo 22. O disco (figura da esqueda) é convexo e estrelado enquanto a figura da direita não é convexa, mas é estrelada.



Exemplo 23. Todo conjunto convexo é estrelado.

Exemplo 24. Todo conjunto estrelado X é contrátil.

Prova: De fato, como X é estrelado, então, $\exists\, p \in X$ tal que $[p, x] \subset X$, $\forall\, x \in X$. Mostremos que 1_X é homotópica à $c : X \longrightarrow X$ definida por $c(x) = p$. Defina, $H : X \times I \longrightarrow X$ por $H(x,t) = (1-t)x + tp$. Então, H é contínua, $H(x,0) = x = 1_X(x)$ e $H(x,1) = p = c(x)$, $\forall\ x \in X$. Portanto, X é contrátil. ∎

Exemplo 25. Se o espaço X é contrátil, então, para todo espaço Y o produto cartesiano $X \times Y$ tem o mesmo tipo de homotopia de Y.

Prova: De fato, como X é contrátil, então, considere $H : X \times I \longrightarrow X$ uma homotopia entre 1_X e uma aplicação constante $c : X \longrightarrow X$, dada por $c(x) = p \in X$. Mostremos que, para todo Y, $X \times Y$ tem o mesmo tipo de homotopia de Y.

Para isto, definamos $f : X \times Y \longrightarrow Y$ por $f(x,y) = y$ e $g : Y \longrightarrow X \times Y$ por $g(y) = (p,y)$. Então, $f \circ g(y) = f(p,y) = y = 1_Y(y) \simeq 1_Y(y)$ e $g \circ f(x,y) = g(y) = (p,y)$. Mostremos que $g \circ f \simeq 1_{X \times Y}$. Para isto, defina $G : (X \times Y) \times I \longrightarrow X \times Y$ por $g(x,y,t) = (H(x, 1-t), y)$. Observe que G é contínua, $G(x,y,0) = (H(x,1),y) = (p,y) = g \circ f(x,y)$ e $G(x,y,1) = (H(x,0),y) = (x,y) = 1_{X \times Y}(x,y)$. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Lima, E.L. - Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.

[2] Wall, C.T.C. - A Geometric Introduction to Topology, Addison-Wesley Publishing Company, 1972

ISSN 1980-024X

Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMat

Orientação aos autores

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem LaTeX, usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em `www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat`, assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.