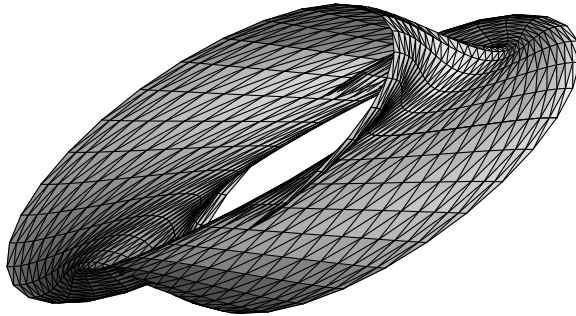

BOLETIM DE INICIAÇÃO
CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA
BICMAT



VOLUME XII
OUTUBRO DE 2015
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IGCE-RIO CLARO

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA–BICMAT

Comissão editorial

Marta Cilene Gadotti

Nativi Viana Pereira Bertolo

Renata Zotin Gomes de Oliveira

Thiago de Melo

Editoração gráfica

Thiago de Melo

Realização

Conselho de Curso de Graduação em Matemática

Departamento de Matemática

IGCE–Unesp–Rio Claro

EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática–BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de iniciação científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE–Unesp–Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat, com ISSN 1980-024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de iniciação científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este número estará disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço

www.rc.unesp.br/igce/matematica

SUMÁRIO

Estabilidade para equações autônomas

Alex Rocha Soares 7

Teoria do Grau de Brouwer e Teoria do Grau de Leray–Schauder

Carolinne Stefane de Souza 17

Convergência Pontual da Série de Fourier

Felipe Felix Souto 29

O Modelo Predador–Presa de Volterra

Felipe Longo 45

Soluções para Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

Fernanda Andrade da Silva 57

Estabilidade de Sistemas Não Lineares Autônomos e Aplicação em Epidemiologia

Gabriela Lopes Theodoro 67

Sobre Variedades Riemannianas

Lucas de Faccio Nunes e Denner Rychard Bocardi dos Santos 75

Uma Aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Maria Leticia Salvador 93

A Matemática por trás da desvalorização do dinheiro

Mariane Rodrigues Regonha 101

Teorema de Schauder e uma Aplicação

Quédima Carlevaro de Souza 115

Teorema de Hahn–Banach e aplicações

Raul Felipe de Oliveira Francisco 123

Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento e Extensão de Soluções

Raul Lima 135

Estabilidade para equações autônomas

Alex Rocha Soares

Orientador(a): Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira
Marconato

Resumo: Considerando que nem sempre é possível explicitar as soluções de equações discretas, estamos interessados em saber se as soluções se aproximam ou se afastam das soluções constantes. E, para isso, abordaremos os conceitos de estabilidade através de Funções de Liapunov e um método mais abrangente, através de Funções Dicotômicas.

Palavras-chave: Equações Discretas; Estabilidade; Funções de Liapunov
Funções Dicotômicas

1 Introdução

Equações discretas descrevem sistemas dinâmicos cuja evolução no tempo é medida em intervalos discretos. A dificuldade em alguns casos para encontrar soluções explícitas para determinadas equações, nos levam a utilizar informações sobre as soluções dessas equações sem realmente resolvê-las. Para a solução dessas equações, buscamos encontrar seu instante de equilíbrio, estudando a estabilidade dos chamados pontos de equilíbrio, através de duas ferramentas: Funções de Liapunov e Funções Dicotômicas.

2 Equações Discretas

Equações Discretas geralmente descrevem a evolução de certo fenômeno ao longo do tempo, como por exemplo a quantidade de droga administrada em um paciente depois de um determinado tempo.

Dada uma função contínua $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, uma equação discreta de primeira ordem é dada por $x_{n+1} = f(n, x_n)$, onde $n \geq n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Neste trabalho vamos nos ater ao caso em que a função f não depende explicitamente da variável n , denominada de equação autônoma,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq n_0 \tag{1.1}$$

As equações dadas por $x_{n+1} - x_n = g(x_n)$ são chamadas de equações de diferenças. Observe que essas equações são equivalentes a (1.1), com $f(x) = g(x) + x$. Por isso, equações de diferenças são geralmente consideradas sinônimos de equações discretas.

Tomando x_0 como valor inicial, obtemos através da relação (1.1), a sequência

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots,$$

e por conveniência, adotamos a notação

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0) = f(f(x_0)), \dots, x_n = f^n(x_0).$$

A solução de (1.1), com valor inicial x_0 , é a sequência x_0, x_1, x_2, \dots

Ao resolver um sistema discreto, estamos interessados em saber se as soluções se aproximam ou se afastam de soluções constantes dadas por pontos de equilíbrio. Este estudo constitui a teoria de estabilidade e a seguir, apresentamos suas definições básicas.

Definição 1. Um ponto x^* no domínio de f , é ponto de equilíbrio de (1.1) se é ponto fixo de f , isto é, $f(x^*) = x^*$.

Observemos que um ponto de equilíbrio x^* de (1.1) gera uma solução constante pois, se $x_0 = x^*$ (valor inicial) então $x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^*$, $x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^*$, e assim por diante.

Definição 2. Um ponto de equilíbrio x^* de (1.1) é estável se dado $\varepsilon > 0$ existir $\delta = \delta(\varepsilon, x^*) > 0$ tal que $\|x_0 - x^*\| < \delta$ implica $\|f^n(x_0) - x^*\| < \varepsilon$ para todo $n > 0$.

Grosseiramente falando, um ponto de equilíbrio x^* de (1.1) é estável quando, para um valor inicial dado x_0 próximo de x^* , a solução que se inicia em x_0 , permanecerá próxima da solução constante dada por x^* . Vamos expor a seguir, dois métodos que avaliam a estabilidade de um ponto de equilíbrio.

3 Método Direto de Liapunov

Em 1892, o matemático russo A.M. Liapunov introduziu um método para estudar a estabilidade das equações diferenciais não-lineares. Essa ferramenta, conhecida como Método Direto de Liapunov permite, através

da determinação de funções reais, nomeadas de Funções de Liapunov, investigar a natureza qualitativa de soluções, sem realmente explicitá-las. Sua grande desvantagem, no entanto, reside na determinação da função adequada para uma dada equação, como veremos a seguir.

Dada uma função $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, a variação de V em relação a (1.1) é dada por:

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$$

e

$$\Delta V(x_n) = V(f(x_n)) - V(x_n) = V(x_{n+1}) - V(x_n)$$

Observemos que se $\Delta V(x_n) \leq 0$, então V é não crescente ao longo das soluções de (1.1).

Definição 3. Uma função $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de Função de Liapunov em $H \subset \mathbb{R}^m$ associada à (1.1) se:

- i) V é contínua em H ,
- ii) $\Delta V(x) \leq 0$, sempre que $x \in H$ e $f(x) \in H$.

Definição 4. Dizemos que a função V é definida positiva em $B(x^*, \gamma)$ (bola aberta de centro x^* e raio γ), se:

- i) $V(x^*) = 0$,
- ii) $V(x) > 0, \forall x \in B(x^*, \gamma), x \neq x^*$.

Com estas hipóteses sobre V , está garantida a estabilidade do ponto de equilíbrio de (1.1) ou seja:

Teorema 1. *Se V é uma função de Liapunov numa vizinhança aberta de H do ponto de equilíbrio x^* de (1.1) e V é definida positiva em H , então x^* é estável.*

Prova: Seja $\alpha_1 > 0$ tal que $B(x^*, \varepsilon) \subset G \cap H$. Como f é contínua, existe $\alpha_2 > 0$ tal que se $x \in B(x^*, \varepsilon)$ então $f(x) \in B(x^*, \alpha_1)$. Dado $0 < \varepsilon \leq \alpha_2$, defina $\psi(\varepsilon) = \min\{V(x)/\varepsilon \leq \|x - x^*\| < \alpha_1\}$. Pelo Teorema do Valor Intermediário em $[0, \psi(\varepsilon)]$, ($V(x^*) = 0$), existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $V(x) < \psi(\varepsilon)$, sempre que $\|x - x^*\| < \delta$. Note que se $x_0 \in B(x^*, \delta)$, então $x(n) \in B(x^*, \varepsilon)$, para todo $n \geq 0$, pois, caso não fosse, existiria $x_0 \in B(x^*, \delta)$ e um inteiro positivo m tal que $x(r) \in B(x^*, \varepsilon), 1 \leq r \leq$

m , e $x(m+1) \notin B(x^*, \varepsilon)$, já que $x(m) \in B(x^*, \varepsilon) \subset B(x^*, \alpha_1)$ e segue que $x(m+1) \in B(x^*, \alpha_1)$. Consequentemente, $V(x(m+1)) \geq \psi(\varepsilon)$. Entretanto, $V(x(m+1)) \leq V(x(m)) \leq V(x_0) < \psi(\varepsilon)$, ou seja, contradição. Assim, temos a estabilidade de x^* . ■

Uma das dificuldades em encontrar uma Função de Liapunov V associada à (1.1) é a exigência de que V seja não crescente ao longo das soluções de (1.1). Sendo assim, vamos apresentar o conceito de Função Dicotômica, que nos apresenta uma teoria mais abrangente.

4 Funções Dicotômicas

Consideremos inicialmente a equação (1.1) com condição inicial $x(0) = x_0$. Vamos supor que $f(0) = 0$ para que a sequência nula seja solução de (1.1) e assim, $x_0 = 0$ é chamado de equilíbrio nulo de (1.1).

Daqui em diante, denotaremos uma certa vizinhança da origem em \mathbb{R}^n por Ω .

Como foi visto anteriormente, a variação de V em relação a (1.1) é dada por $\Delta V(y) = V(f(y)) - V(y)$. Este conceito é generalizado como se segue: dados inteiros $p > 0$ e $q > 0$, definimos

$$\Delta_q^p V(y) = V(f^p(y)) - V(f^q(y)) = V(x_p) - V(x_q(y))$$

em que f^j é a j -ésima iteração de f e como já vimos, $x_p(y) = f^p(y)$.

Definição 5. Uma função contínua $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada dicotômica em Ω com a relação à (1.1), se existir um inteiro $k \geq 2$ tal que, sempre que $y \in \Omega$ e $\Delta_{k-1}^k V(y) \geq 0$, então $\Delta_0^k V(y) \leq 0$.

Definição 6. Dado um ponto $y \in \mathbb{R}^m$, um inteiro $k > 0$ e uma função $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $j = 1, 2, \dots$, definimos no intervalo $[(j-1)k, jk]$,

$$c_j = \max\{V(x_n(y))/(j-1), k \leq n \leq jk\}$$

e

$$j^* = \min\{n/(j-1), k \leq n \leq jk, c_j = V(x_n(y))\},$$

ou seja, j^* é o mínimo entre os índices do intervalo $[(j-1)k, jk]$ nos quais ocorre o valor máximo de $V(x_n(y))$ neste intervalo.

Lema 7. Se V é dicotômica em relação a (1.1), $j \geq 2$, então $c_j \leq c_{j-1}$.

Prova: Temos dois casos a considerar:

Caso 1: Se $j^* > (j - 1)k$ então,

$$j^* - 1 \geq (j - 1)k. \quad (1.2)$$

Como $j^* \in [(j - 1)k, jk]$, por (1.2), temos:

$$(j - 1)k \leq j^* - 1 < j^* \leq jk.$$

Pela definição de j^* ,

$$V(x_{j^*}(y)) > V(x_{j^*-1}(y)) \Rightarrow V(x_{j^*}(y)) - V(x_{j^*-1}(y)) > 0, \quad \forall y \in \Omega.$$

Assim,

$$V(x_{j^*}(y)) - V(x_{j^*-1}(y)) = V(x_k(x_{j^*-k}(y))) - V(x_{k-1}(x_{j^*-k}(y))) > 0,$$

logo,

$$\forall y \in \Omega, \quad \Delta_{k-1}^k \geq 0.$$

Como, por hipótese, V é dicotômica, então:

$$\begin{aligned} V(x_k(x_{j^*-k}(y))) - V(x_{j^*-k}(y)) &\leq 0 \Rightarrow V(x_{j^*}(y)) - V(x_{j^*-k}(y)) \leq 0 \\ &\Rightarrow V(x_{j^*}(y)) \leq V(x_{j^*-k}(y)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por outro lado, $j^* - k \in [(j - 2)k, (j - 1)k]$ e c_{j-1} é o valor de máximo do conjunto $\{V(x_n(y)) / (j - 2)k \leq n \leq (j - 1)k\}$ então,

$$V(x_{j^*-k}(y)) \leq c_{j-1}. \quad (1.4)$$

Por (1.3) e (1.4)

$$c_j = V(x_{j^*}(y)) \leq V(x_{j^*-k}(y)) \leq c_{j-1}.$$

Assim, concluímos o primeiro caso.

Caso 2: Se $j^* = (j - 1)k$, então $j^* \in [(j - 2)k, (j - 1)k]$ logo,

$$c_j = V(x_{j^*}(y)) \leq c_{j-1}.$$

Portanto, $c_j \leq c_{j-1}$. ■

Com as ferramentas dadas, provemos a seguir a estabilidade de um ponto de equilíbrio através de Funções Dicotômicas.

Teorema 2. *Suponha que a função V seja definida positiva e dicotômica em Ω em relação à (1.1). Então, o equilíbrio nulo é estável.*

Prova: Sejam $R > 0$ e $r > 0$, $r < R$, de forma que $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq R\} \subset \Omega$ e $\sup\{\|f(y)\| \in \mathbb{R}^m \mid \|y\| \leq r\} \leq R$. Definimos $\delta = \inf\{V(y) \in \mathbb{R} \mid r \leq \|y\| \leq R\}$. Observemos que δ não pode ser zero, pois V é contínua, $V(y) = 0$ somente para $y = 0$ e para os demais, $V(y) > 0$ e além disso, $r \leq \|y\| \leq R$. Assim, $\delta > 0$.

Mostremos agora que existe $\gamma > 0$, $\gamma < r$ tal que, para $\|y\| < \gamma$, $V(y) < \delta$. Para tanto, definimos $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = V(x) - \delta$ com $h(0) = V(0) - \delta = -\delta < 0$. Como V é contínua em zero, pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe $\gamma \in (0, r)$ tal que $\|y\| < \gamma$ implica $h(y) < 0$. Portanto, $h(y) = V(y) - \delta < 0$, isto é, $V(y) < \delta$, sempre que

$$\|y\| < \gamma < r \leq R \quad (1.5)$$

Vale também que, se $\|y\| \leq R$ e $V(y) < \delta$, então, necessariamente, $\|y\| < r$ pois

$$r \leq \|y\| \leq R \Rightarrow V(y) \geq \delta. \quad (1.6)$$

Para $\gamma > 0$ e pela continuidade de f em zero, existe $\mu \in (0, r)$ tal que $\|y\| < \mu$ implica $\|x_n(y)\| < \gamma < R$, para $n = 1, 2, \dots, k$.

Por (1.5), $V(x_n(y)) < \delta$. Logo, por (1.6), $\|x_n(y)\| < r$ para $\|y\| < \mu < r \leq R$, com $n = 1, 2, \dots, k$.

Como $c_1(y) = \max\{V(x_n(y)), 0 \leq n \leq k\} < \delta$, segue pelo lema anterior que $c_j(y) \leq c_1(y) < \delta$ para $j \geq 1$. Assim, $V(x_n(y)) < \delta$ para $n = (j-1)k, \dots, jk$, $j \in \mathbb{N}$. E por (1.6), sempre que $\|y\| < \mu$, temos que $\|x_n(y)\| < r$ para $n = (j-1)k, \dots, jk$, $j \in \mathbb{N}$.

Logo, para $r > 0$, existe $\mu > 0$ tal que, se $\|y\| < \mu$, $\|x_n(y)\| < r$ e portanto, o equilíbrio nulo é estável. ■

Exemplo 8. Considere a equação

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Vamos analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio nulo de (1.7).

A função $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com a lei $V(x, y) = x^2 + y^2$ não é Função de Liapunov em relação à (1.7) devido ao fato de que $\Delta V(x, y)$ não tem sinal definido em nenhuma vizinhança da origem.

De fato, de (1.7) temos:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

Logo, $\Delta V(x_n, y_n) = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 - (x_n^2 + y_n^2) = (x_n - y_n)^2 - y_n^2$.

Para avaliar o sinal de $\Delta V(x, y)$ numa vizinhança da origem, verificaremos inicialmente para quais valores $\Delta V(x, y) = 0$, isto é, $(x - y)^2 - y^2 = 0$, que é equivalente a $y^2 = (x - y)^2$, ou $|y| = |x - y|$.

Se $y \geq 0$, então:

$$y = |y - x| = \begin{cases} x - y, & \text{se } x - y \geq 0, \\ y - x, & \text{se } x - y < 0. \end{cases}$$

Para $(x, y) \in A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}$, $y = x - y$, que é equivalente a $y = \frac{x}{2}$.

Para $(x, y) \in A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, y > x\}$, $y = y - x$, que é equivalente a $x = 0$.

Se $y < 0$, então:

$$y = -|x - y| = \begin{cases} y - x, & \text{se } x - y \geq 0, \\ x - y, & \text{se } x - y < 0. \end{cases}$$

Para $(x, y) \in A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, y \leq x\}$, $y = y - x$, que é equivalente a $x = 0$.

Para $(x, y) \in A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < 0\}$, $y = x - y$, que é equivalente a $y = \frac{x}{2}$.

Verificaremos a seguir, para quais valores $\Delta V(x, y) < 0$ e para quais $\Delta V(x, y) > 0$.

$$\Delta V(x, y) < 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 - y^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 < y^2 \Leftrightarrow x^2 < 2xy.$$

Assim, se $x > 0$, segue que $y > \frac{x}{2}$ e se $x < 0$ então $y < \frac{x}{2}$.

Analogamente prova-se que $\Delta V(x, y) < 0$ para $y < \frac{x}{2}$ ($x > 0$) e para $y > \frac{x}{2}$ ($x < 0$).

Analisando o sinal de $\Delta V(x, y)$ numa vizinhança da origem, verificamos que $\Delta V(x, y) \leq 0$ não ocorre em toda vizinhança. Portanto a função V não é Função de Liapunov em relação à (1.7).

Vamos então provar que V é Função Dicotômica para $k = 3$ garantindo a estabilidade do equilíbrio nulo de (1.7). Para tanto, analisemos o sinal de $\Delta_2^3 V(x, y)$ e de $\Delta_0^3 V(x, y)$.

Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \Delta_2^3 V(x, y) \geq 0 &\Leftrightarrow x_3^2 + y_2^3 - (x_2^2 + y_2^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x_2 - y_2)^2 + x_2^2 - x_2^2 - y_2^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - y_1 - x_1)^2 - x_1^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (x - y)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq (x - y)^2 \\ &\Leftrightarrow |x| \geq |x - y|. \end{aligned}$$

Se $x \geq 0$, então:

$$x \geq |x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{se } x - y \geq 0, \\ y - x & \text{se } x - y < 0. \end{cases}$$

Para $(x, y) \in A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x \geq y\}$, $x \geq x - y$ que é equivalente a $y \geq 0$.

Para $(x, y) \in A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x < y\}$, $x \geq y - x$ que é equivalente a $y \leq 2x$.

Se $x < 0$, então:

$$x \leq -|x - y| = \begin{cases} y - x, & \text{se } x - y \geq 0, \\ x - y, & \text{se } x - y < 0. \end{cases}$$

Para $(x, y) \in A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x < 0\}$, $x \leq y - x$, que é equivalente a $y \geq 2x$.

Para $(x, y) \in A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, x < y\}$, $x \leq x - y$, que é equivalente a $y \leq 0$.

A região em que $\Delta_2^3 V(x, y) \geq 0$ está representada na figura abaixo.

Vamos agora analisar o sinal de $\Delta_0^3 V(x, y)$.

Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \Delta V_0^3(x, y) &= x_3^2 + y_3^2 - (x^2 - y^2) \\ &= (x_2 - y_2)^2 + x_2^2 - x^2 - y^2 \\ &= (x_1 - y_1 - x_1)^2 + (x_1 - y_1)^2 - x^2 - y^2 \\ &= y_1^2 + (x - y - x)^2 - x^2 - y^2 \\ &= x^2 + y^2 - x^2 - y^2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, a região em que $\Delta_0^3 V(x, y) \leq 0$ engloba toda vizinhança da origem a ser considerada, pois $\Delta_0^3 V(x, y) = 0$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

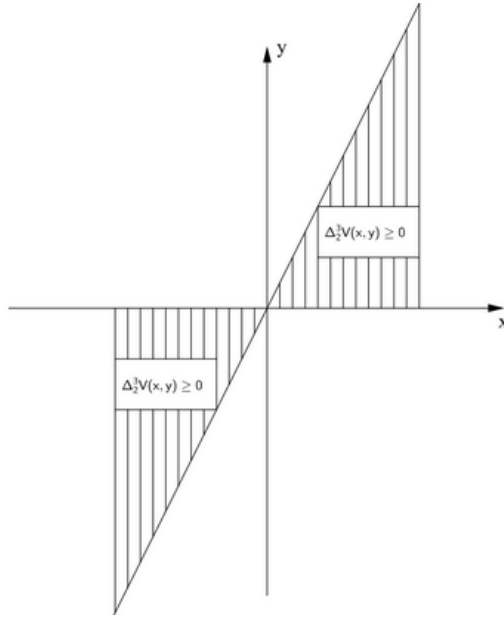


Figura 1.1: Região do plano onde $\Delta_2^3 V(x, y) \geq 0$

Afirmamos que V é uma função dicotômica em relação a (1.7) para qualquer vizinhança da origem, com $k = 3$, isto é, se (x, y) pertencer a uma vizinhança da origem e $\Delta_2^3 V(x, y) \geq 0$ então $\Delta_0^3 V(x, y) \leq 0$. Como V é definida positiva em \mathbb{R}^2 e dicotômica em relação a (1.7), então pelo Teorema 2 temos que o equilíbrio nulo de (1.7) é estável.

5 Considerações Finais

Através de estudo de Funções Dicotômicas, conseguimos abranger o Método de Liapunov, ou seja, conseguimos definir uma função V que, para se garantir a estabilidade do equilíbrio nulo, não exige decaimento de $V(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta que, se de algum passo $k - 1$ para o passo k a variação de $V(x_n(y))$ for não negativa, exige-se que, do passo inicial ao passo k a variação seja não positiva.

Agradecimentos: Agradeço à Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato não apenas pela enorme paciência na supervisão desse trabalho,

mas pelo companheirismo e pela amizade desde do meu primeiro dia como aluno da UNESP. Aos meus amigos: Cristiano, Felipe, Juliana e Patricia pelo apoio e amizade construída.

Abstract: Considering that is not always possible to explicit the solutions of discrete equations, we are interested in knowing if these solutions are approaching or moving away from the constant solution. To do so, we shall cover the concept of stability through Liapunov Functions and Dichotomic Functions, which is a more general method.

Keywords: Discrete Equations; Stability; Liapunov Functions, Dichotomic Functions

Referências Bibliográficas

- [1] ZIBIANI, Edilson. Estabilidade para Equações Discretas Autônomas. Dissertação(programa de pós-graduação em matemática universitária), Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, SP, 2015.
- [2] ELAYDI, S., An Introduction To Difference Equations, SPRINGER, 2000.

Teoria do Grau de Brouwer e Teoria do Grau de Leray–Schauder

Carolinne Stefane de Souza¹

Orientador(a): Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

Resumo: Neste trabalho abordaremos a teoria do grau topológico de Brouwer que vale em espaços vetoriais de dimensão finita e a teoria do grau de Leray–Schauder que vale em espaços vetoriais de dimensão infinita. Além disso, demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer utilizando as teorias supramencionadas.

Palavras-chave: Grau de Brouwer, Grau de Leray–Schauder, Ponto Fixo.

1 Preliminares

Inicialmente, introduziremos alguns conceitos e resultados que auxiliarão na abordagem da teoria do grau.

Definição 1. Seja X um espaço vetorial normado. Diremos que X é um espaço de Banach quando X for completo, isto é, quando toda sequência de Cauchy em X convergir em X .

Teorema 2 (Teorema da Função Inversa). *Sejam E e F espaços de Banach. Seja U um subconjunto aberto de E e seja $g : U \rightarrow F$ uma aplicação de classe C^1 tal que, em um ponto $x_0 \in U$, a transformação linear $g'(x_0) : E \rightarrow F$ é um isomorfismo. Então, existe um aberto $A \subset U$ contendo x_0 tal que a restrição $g|_A : A \rightarrow g(A)$ é um difeomorfismo de classe C^1 entre os abertos A e $g(A)$.*

Definição 3. Duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos dizem-se homotópicas se existir uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, denominada homotopia, tal que $F_0 = f$ e $F_1 = g$, onde $F_t = F|_{X \times \{t\}}$.

¹Bolsista FAPESP - Processo 2014/21268-4

Definição 4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e seja $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ o espaço das aplicações $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que juntamente com suas derivadas até a ordem k são restrições de aplicações contínuas definidas em um aberto que contém $\overline{\Omega}$.

No espaço $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, consideraremos a seguinte norma

$$\|\varphi\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max\{C_j; 0 \leq j \leq k\},$$

onde $C_j = \max\{\|D^j \varphi(x)\|; x \in \overline{\Omega}\}$ e $D^j \varphi$ denota a derivada de ordem j de φ .

$C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ denota o espaço das aplicações contínuas de $\overline{\Omega}$ em \mathbb{R}^n munido da norma

$$\|\varphi\|_{C(\overline{\Omega})} = \max\{|\varphi(x)|; x \in \overline{\Omega}\}.$$

Proposição 5. *Sejam Ω um subconjunto aberto limitado de \mathbb{R}^n , $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e $b \notin (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S))$, onde $S = \{x \in \Omega; J_\varphi[x] = 0\}$ e $J_\varphi[x]$ é o determinante Jacobiano da aplicação φ no ponto x . Então, o conjunto $A = \{x \in \Omega; \varphi(x) = b\}$ é finito.*

Prova: Se $A = \emptyset$, nada temos a fazer.

Consideremos $A \neq \emptyset$. Dado $x \in A$, temos $J_\varphi[x] \neq 0$, pois $b \notin \varphi(S)$. Pelo Teorema da Função Inversa, existe um aberto O_x contendo x tal que $\varphi|_{O_x}$ é um difeomorfismo entre O_x e $\varphi(O_x)$, com $b \in \varphi(O_x)$.

Como φ é contínua e $\{b\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado, segue que $A = \varphi^{-1}(\{b\})$ também é um conjunto fechado em $\overline{\Omega}$. Além disso, como $\overline{\Omega}$ é compacto (fechado e limitado em \mathbb{R}^n) e $A \subset \Omega$, temos que A é compacto. Sendo assim, uma vez que

$$A \subset \bigcup_{x \in A} O_x,$$

através do Teorema de Borel-Lebesgue, podemos afirmar que existem $x_1, \dots, x_n \in A$ de forma que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n O_{x_i}. \quad (1.1)$$

Como $\varphi : O_{x_i} \rightarrow \varphi(O_{x_i})$ é difeomorfismo para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, segue de (1.7) que $A = \{x_1, \dots, x_n\}$. ■

2 Grau de Brouwer

Com a conclusão extraída da Proposição 5, definimos o grau topológico de Brouwer para aplicações de classe C^1 como segue.

Definição 6. Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n , $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e $b \notin (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S))$. O grau de Brouwer de φ em Ω relativamente a b , denotado por $d(\varphi, \Omega, b)$, é definido por

$$d(\varphi, \Omega, b) = \begin{cases} 0, & \varphi^{-1}(\{b\}) = \emptyset, \\ \sum_{i=1}^n \text{sgn}(J_\varphi[x_i]), & \varphi^{-1}(\{b\}) = \{x_1, \dots, x_n\}, \end{cases}$$

onde a função $\text{sgn} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$ é dada por

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Vamos agora introduzir a definição do grau de Brouwer para aplicações contínuas.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Considere $r = \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega))$. É sabido (pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass) que existe uma aplicação $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\varphi - \psi\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{r}{2}$.

Para demonstrarmos a próxima proposição, que será de grande valia para a definição do grau de Brouwer para aplicações contínuas, provaremos o seguinte resultado:

Lema 7. *Sejam $H \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Então,*

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \text{ é constante em } [0, 1].$$

Prova: Na demonstração deste lema, usaremos o seguinte resultado de Análise no \mathbb{R}^n :

Resultado auxiliar: *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : K \times X \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma função contínua. Então, fixado $x_0 \in X$ e dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:*

$$\forall x \in X; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(y, x) - f(y, x_0)| < \epsilon, \quad \forall y \in K.$$

Vamos fixar $\tau \in [0, 1]$ e aplicar o resultado acima para as funções H e $\partial_2 H$, onde $\partial_2 H$ denota a derivada de H em relação à segunda variável.

Sendo assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que

$$\forall t \in [0, 1]; |t - \tau| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |H(y, t) - H(y, \tau)| < \epsilon, \\ |\partial_2(y, t) - \partial_2(y, \tau)| < \epsilon, \end{cases}$$

para todo $y \in \bar{\Omega}$, de onde segue que

$$\forall t \in [0, 1]; |t - \tau| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot, t) - H(\cdot, \tau)\|_{C^1(\bar{\Omega})} < \epsilon.$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos, então, afirmar que existe $\delta > 0$ tal que

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) = d(H(\cdot, \tau), \Omega, b), \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad |t - \tau| < \delta.$$

Como $[0, 1]$ é compacto e conexo, e a função $t \in [0, 1] \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, b) \in \mathbb{Z}$ é localmente constante, concluímos que $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante em $[0, 1]$. ■

Proposição 8. *Sejam $\psi_1, \psi_2 \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tais que $\|\varphi - \psi_1\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{r}{2}$ e $\|\varphi - \psi_2\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{r}{2}$. Então,*

$$b \notin \psi_1(\partial\Omega), \quad b \notin \psi_2(\partial\Omega) \quad \text{e} \quad d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b).$$

Prova: Seja a homotopia $H : \bar{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$H(x, t) = t\psi_1(x) + (1 - t)\psi_2(x).$$

Note que, para $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \|H(\cdot, t) - \varphi\|_{C(\bar{\Omega})} &= \|t\psi_1 + (1 - t)\psi_2 - \varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \\ &= \|t\psi_1 + (1 - t)\psi_2 - t\varphi - (1 - t)\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \\ &\leq t\|\psi_1 - \varphi\|_{C(\bar{\Omega})} + (1 - t)\|\psi_2 - \varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \\ &< t\frac{r}{2} + (1 - t)\frac{r}{2} = \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $|H(x, t) - \varphi(x)| < \frac{r}{2}$, para todo $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$. Afirmamos que $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. De fato, suponha que exista $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times [0, 1]$ tal que $H(x_0, t_0) = b$.

Então,

$$r = \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega)) \leq |b - \varphi(x_0)| = |H(x_0, t_0) - \varphi(x_0)| < \frac{r}{2}.$$

Isto é, $r < \frac{r}{2}$. Eis, pois, uma contradição.

Portanto, pelo Lema 7, temos que

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \text{ é constante em } [0, 1],$$

de onde segue que

$$d(H(\cdot, 0), \Omega, b) = d(H(\cdot, 1), \Omega, b)$$

e

$$d(\psi_2, \Omega, b) = d(\psi_1, \Omega, b). \quad \blacksquare$$

Através da Proposição 8 podemos definir o grau de Brouwer de φ em Ω com relação a b pondo

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b),$$

onde $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}$ e $r = \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega))$.

Dentre as propriedades do grau de Brouwer para aplicações contínuas, destacamos as quatro seguintes:

Proposição 9. *Se $H \in C(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ é uma homotopia e $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, então*

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \text{ é constante em } [0, 1].$$

Prova: Para cada $\tau \in [0, 1]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0, 1]; |\tau - t| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot, t) - H(\cdot, \tau)\|_{C(\overline{\Omega})} < \varepsilon,$$

já que H é contínua em $\overline{\Omega} \times [0, 1]$.

Sendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos afirmar que:

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) = d(H(\cdot, \tau), \Omega, b) \text{ quando } t \approx \tau.$$

Logo, a aplicação $t \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é localmente constante.

Como o intervalo $[0, 1]$ é um conjunto compacto e conexo, concluímos que $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante em $[0, 1]$. ■

Proposição 10. *Se $I : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade, então $d(I, \Omega, b) = 1$ para qualquer $b \in \Omega$.*

Prova: Como $I' \equiv I$, temos que:

$$d(I, \Omega, b) = \sum \text{sgn}(J_I[b]) = 1. \quad \blacksquare$$

Proposição 11. *Seja $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua com $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$. Então $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.*

Prova: Seja $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}$, com $r = \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega))$. Temos, então, que:

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

É fácil verificar que $b \notin \psi(\overline{\Omega})$. Daí, $d(\psi, \Omega, b) = 0$ (veja Definição 6) e, por conseguinte, $d(\varphi, \Omega, b) = 0$. ■

Proposição 12. *Sejam $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x \in \Omega$ tal que $\varphi(x) = b$.*

Prova: Se supuséssemos que b não pertencesse a $\varphi(\Omega)$, então não existiria $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $\varphi(x_0) = b$ e, pela Proposição 11, teríamos $d(\varphi, \Omega, b) = 0$. ■

Com o auxílio das propriedades do grau de Brouwer para aplicações contínuas exibidas acima, podemos provar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema 13 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). *Seja $\overline{B} = \overline{B}_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq r\}$. Se $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ é uma aplicação contínua, então existe $x_0 \in \overline{B}$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Prova: Definamos $\varphi : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varphi(x) = x - f(x)$, para $x \in \overline{B}$. Claramente, φ é uma aplicação contínua em \overline{B} .

Se existir $x_0 \in \partial B$ tal que $f(x_0) = x_0$, o resultado está demonstrado. Suponhamos, então, $f(x) \neq x$ (e, portanto, $\varphi(x) \neq 0$), para qualquer $x \in \partial B$. Neste caso, $0 \notin \varphi(\partial B)$.

Consideremos a homotopia $H : \overline{B} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $H(x, t) = x - tf(x)$, para $(x, t) \in \overline{B} \times [0, 1]$.

Afirmamos que $0 \notin H(\partial B \times [0, 1])$. De fato, se $t = 1$,

$$H(x, 1) = x - f(x) = \varphi(x) \neq 0, \quad \forall x \in \partial B.$$

Agora, se $t_0 \in [0, 1)$, então para $y \in \partial B$, temos

$$\|t_0 f(y)\| = t_0 \|f(y)\| \leq t_0 r < r = \|y\|,$$

o que mostra que $t_0 f(y) \neq y$, para qualquer $y \in \partial B$. Por conseguinte, $H(y, t_0) \neq 0$ para qualquer $y \in \partial B$, e $0 \notin H(\partial B \times [0, 1])$.

Pela Proposição 9, $d(H(\cdot, t), B, 0)$ é constante para todo $t \in [0, 1]$. Daí,

$$d(H(\cdot, 0), B, 0) = d(H(\cdot, 1), B, 0). \tag{1.2}$$

Por outro lado,

$$H(x, 0) = x = I(x), \forall x \in \overline{B} \text{ e } H(x, 1) = \varphi(x), \forall x \in \overline{B}. \tag{1.3}$$

Então, por (1.11), (1.12) e pela Proposição 10, temos

$$d(\varphi, B, 0) = d(I, B, 0) = 1.$$

Portanto, $d(\varphi, B, 0) \neq 0$ e, pela Proposição 12, concluímos que existe $x_0 \in B$ tal que $\varphi(x_0) = 0$, ou seja, existe $x_0 \in B$ tal que $f(x_0) = x_0$. ■

3 Grau de Leray-Schauder

Veremos, agora, a teoria do grau válida em espaços de dimensão infinita. No que segue, E denota um espaço de Banach munido da norma $\|\cdot\|$.

Definição 14. Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de E . Diremos que uma aplicação do tipo $\phi = I - T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ é uma perturbação de dimensão finita da identidade, onde $I : E \rightarrow E$ é a aplicação identidade e $T \in C(\overline{\Omega}, E)$, quando $T(\overline{\Omega})$ estiver contido em um subespaço de dimensão finita de E .

Definição 15. Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de E e seja $\phi = I - T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ uma perturbação de dimensão finita da identidade. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e F for um subespaço de dimensão finita de E contendo b e $T(\overline{\Omega})$, definiremos o grau de ϕ em Ω com relação a b por:

$$d(\phi, \Omega, b) := d(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Devemos verificar que esta definição é “consistente”, no sentido de que a mesma independe da escolha do subespaço F que contém b e $T(\overline{\Omega})$. Sejam, pois, F_1 e F_2 subespaços de dimensão finita contendo b e $T(\overline{\Omega})$.

Como $F_1 \cap F_2$ é um subespaço de E de dimensão finita que contém b e $T(\overline{\Omega})$, temos:

$$d(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = d(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F_1 \cap F_2}, \Omega \cap F_1 \cap F_2, b), \tag{1.4}$$

e

$$d(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F_2}, \Omega \cap F_2, b) = d(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F_1 \cap F_2}, \Omega \cap F_1 \cap F_2, b). \quad (1.5)$$

De (1.4) e (1.5), segue que

$$d(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = d(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F_2}, \Omega \cap F_2, b).$$

Definição 16. Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de E . Um operador $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ é dito compacto se é contínuo e $T(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto (ou seja, o conjunto $\overline{T(\overline{\Omega})}$ é compacto).

Denotemos o conjunto de todos os operadores compactos $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ por $Q(\overline{\Omega}, E)$.

É fácil verificar que $Q(\overline{\Omega}, E)$ munido da norma

$$\|T\|_Q = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|T(x)\|, \quad T \in Q(\overline{\Omega}, E).$$

é um espaço de Banach.

Lema 17. *Seja $K \subset E$ um conjunto compacto. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um subespaço de dimensão finita F_ε de E e uma aplicação contínua $g_\varepsilon : K \rightarrow F_\varepsilon$ tal que $\|x - g_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ para qualquer $x \in K$.*

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, temos que $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon)$. Segue da compacidade de K que existem $y_1, \dots, y_n \in E$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon).$$

Consideremos $F_\varepsilon = [y_1, \dots, y_n]$ (subespaço gerado por y_1, \dots, y_n). Claramente, $\dim F_\varepsilon < \infty$. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, consideremos as seguintes funções

$$b_i : E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definidas por}$$

$$b_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - y_i\|, & \text{se } x \in B(y_i, \varepsilon), \\ 0, & \text{se } x \notin B(y_i, \varepsilon). \end{cases}$$

Usando as funções b_i 's, definimos $g_\varepsilon : K \rightarrow F_\varepsilon$ por

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x) y_i}{\sum_{i=1}^n b_i(x)}.$$

Como as funções b_i 's são contínuas, segue que g_ε também é contínua.

Além disso,

$$\begin{aligned} \|x - g_\varepsilon(x)\| &= \left\| \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)x}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} - \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)y_i}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} \right\| \\ &= \left\| \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)(x - y_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} \right\| \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)\|x - y_i\|}{\sum_{i=1}^n b_i(x)}. \end{aligned}$$

Daí, para todo $x \in K$,

$$\|x - g_\varepsilon(x)\| < \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} \varepsilon = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Definição 18. Se $T : \bar{\Omega} \rightarrow E$ for um operador compacto, diremos que a aplicação $\phi = I - T$ é uma perturbação compacta da identidade.

É fácil verificar que se $T \in Q(\bar{\Omega}, E)$ então a aplicação $\phi = I - T : \bar{\Omega} \rightarrow E$ é fechada e própria.

Afirmamos que podemos aproximar $\phi = I - T$ com $T \in Q(\bar{\Omega}, E)$ por uma perturbação de dimensão finita da identidade $\phi_r = I - T_r$, com $r > 0$.

De fato, dado $b \notin \phi(\partial\Omega)$, seja $r = \text{dist}(b, \phi(\partial\Omega))$. Considere $K = T(\bar{\Omega})$ e observe que K é compacto em E , pois T é contínua e $\bar{\Omega}$ é compacto. Pelo Lema 17, existe um subespaço de dimensão finita $F_{\frac{r}{2}}$ e uma aplicação contínua $g_{\frac{r}{2}} : K \rightarrow F_{\frac{r}{2}}$ tal que $\|x - g_{\frac{r}{2}}(x)\| < \frac{r}{2}$, para qualquer $x \in K$.

Defina $T_r : \bar{\Omega} \rightarrow F_{\frac{r}{2}}$ e $\phi_r : \bar{\Omega} \rightarrow E$ por $T_r(x) = (g_{\frac{r}{2}} \circ T)(x)$ e $\phi_r(x) = x - T_r(x)$, para $x \in \bar{\Omega}$, respectivamente.

Afirmamos que $b \notin \phi_r(\partial\Omega)$. Com efeito, dado $x_0 \in \partial\Omega$, temos

$$\begin{aligned} \|b - \phi_r(x_0)\| &\geq \|b - \phi(x_0)\| - \|\phi(x_0) + \phi_r(x_0)\| \\ &\geq r - \|T(x_0) - T_r(x_0)\| \\ &\geq r - \|T(x_0) - (g_{\frac{r}{2}} \circ T)(x_0)\| \\ &\geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Definição 19. Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de E e $\phi = I - T : \bar{\Omega} \rightarrow E$ uma aplicação, onde $T : \bar{\Omega} \rightarrow E$ é um operador compacto. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$, definimos o grau de ϕ em Ω com relação a b por

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi_r, \Omega, b),$$

onde $\phi_r = I - T_r$ é uma perturbação de dimensão finita da identidade que satisfaz

$$\|\phi - \phi_r\| < \frac{r}{2}, \quad (1.6)$$

onde $r = \text{dist}(b, \phi(\partial\Omega))$.

Note que o conjunto das perturbações de dimensão finita da identidade que usaremos para calcular o grau $d(\phi, \Omega, b)$ é não vazio, pois a aplicação $\phi_r = I - T_r$, com $T_r = g_{\frac{r}{2}} \circ T$, cumpre as exigências da Definição 19.

Proposição 20. *A Definição 19 independe da escolha de ϕ_r .*

Prova: Sejam $\phi_{r_1} = I - T_{r_1}$ e $\phi_{r_2} = I - T_{r_2}$, onde $\phi_{r_1}, \phi_{r_2} : \bar{\Omega} \rightarrow E$ são duas perturbações finitas da identidade, com

$$\|\phi - \phi_{r_i}\| < \frac{r}{2}, \quad i = 1, 2, \quad r = \text{dist}(b, \phi(\partial\Omega)).$$

Sejam F_1 e F_2 subespaços de dimensão finita de E tais que $T_{r_i}(\bar{\Omega}) \subset F_i$ e $b \in F_i$ para $i = 1, 2$.

O subespaço $F = F_1 + F_2$ contém b e $T_{r_i}(\bar{\Omega})$, para $i = 1, 2$.

Para facilitar a notação, tomemos $\bar{\phi}_{r_i} = \phi_{r_i}|_{\bar{\Omega} \cap F}$, $i = 1, 2$. Desta forma,

$$d(\phi_{r_i}, \Omega, b) = d(\bar{\phi}_{r_i}, \Omega \cap F, b), \quad i = 1, 2.$$

Consideremos, agora, a homotopia $H : (\bar{\Omega} \cap F) \times [0, 1] \rightarrow F$ dada por $H(x, t) = t\bar{\phi}_{r_1}(x) + (1-t)\bar{\phi}_{r_2}(x)$, para $(x, t) \in (\bar{\Omega} \cap F) \times [0, 1]$.

Veja que

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - H(x, t)\| &= \|t\phi(x) + (1-t)\phi(x) - t\bar{\phi}_{r_1}(x) + (1-t)\bar{\phi}_{r_2}(x)\| \\ &\leq t\|\phi(x) - \bar{\phi}_{r_1}(x)\| + (1-t)\|\phi(x) - \bar{\phi}_{r_2}(x)\| \\ &< t\frac{r}{2} + (1-t)\frac{r}{2} = \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma $b \notin H(\partial(\bar{\Omega} \cap F) \times [0, 1])$, pois, para $x_0 \in \partial(\bar{\Omega} \cap F)$, temos

$$\|b - H(x_0, t_0)\| \geq \|b - \phi(x_0)\| - \|\phi(x_0) - H(x_0, t_0)\| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0.$$

Usando a Invariância do Grau de Brouwer por homotopia, temos

$$d(\phi_{r_1}, \Omega, b) = d(\bar{\phi}_{r_1}, \Omega \cap F, b) = d(\bar{\phi}_{r_2}, \Omega \cap F, b) = d(\phi_{r_2}, \Omega, b). \quad \blacksquare$$

Dentre as propriedades do grau de Leray-Schauder, destacamos as seguintes:

Proposição 21. *Se Ω é um subconjunto aberto e limitado de E e $I : E \rightarrow E$ é a aplicação identidade, então:*

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & b \in \Omega \\ 0, & b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Proposição 22. *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de E e $\phi = I - T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ uma aplicação, onde $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ é um operador compacto. Se $b \notin \phi(\overline{\Omega})$, então $d(\phi, \Omega, b) = 0$. Em particular, temos $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e $d(\phi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $u_0 \in \Omega$ tal que $\phi(u_0) = b$.*

Proposição 23. *Seja H uma aplicação em $C(\overline{\Omega} \times [0, 1], E)$ definida por $H(x, t) = x - S(x, t)$, para $(x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, 1]$, onde $S : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow E$ é um operador compacto. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, então $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante em $[0, 1]$.*

As demonstrações das proposições acima são extensas e, por isso, julgamos por bem não explorá-las aqui. Estas podem ser encontradas em [1] e [2].

Como consequência das três propriedades listadas acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 24 (Teorema do Ponto Fixo de Schaefer). *Seja $T : E \rightarrow E$ um operador compacto. Se existir $r > 0$ tal que*

$$\sigma T(u) = u \Leftrightarrow \|u\| < r,$$

para $u \in E$ e $\sigma \in [0, 1]$, então T admitirá um ponto fixo em E .

Prova: Seja $\overline{B}_r(0) = \{x \in E; \|x\| \leq r\}$ e defina $H : \overline{B}_r(0) \times [0, 1] \rightarrow E$ por $H(u, \sigma) = u - \sigma T(u)$, para $(u, \sigma) \in \overline{B}_r(0) \times [0, 1]$.

Afirmamos que $0 \notin H(\partial B_r(0) \times [0, 1])$. De fato,

$$0 = H(u, \sigma) \Leftrightarrow 0 = u - \sigma T(u) \Leftrightarrow u = \sigma T(u) \Leftrightarrow u \in B_r(0).$$

Pela Proposição 23, temos

$$\begin{aligned} d(H(\cdot, 0), B_r(0), 0) &= d(H(\cdot, 1), B_r(0), 0) \Rightarrow \\ d(I, B_r(0), 0) &= d(I - T, B_r(0), 0). \end{aligned}$$

Então, pela Proposição 21, $d(I-T, B_r(0), 0) = 1 \neq 0$ e, pela Proposição 22, existe $u \in B_r(0)$ tal que

$$(I - T)u = 0, \text{ isto é, } u = T(u). \quad \blacksquare$$

Agradecimentos: Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso, pelo apoio e dedicação neste trabalho. Também agradeço ao auxílio financeiro da FAPESP.

Abstract: In this work we discuss the Brouwer degree theory in finite dimensional spaces and the Leray–Schauder degree theory in infinite dimensional spaces. In addition, we will prove Brouwer Fixed Point Theorem and Schaefer Fixed Point Theorem using such theories.

Keywords: Brouwer Degree, Leray–Schauder Degree, Point Fixed.

Referências Bibliográficas

- [1] De Almeida, O. B., *Teoria do Grau e Aplicações*, Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, 2006.
- [2] Berestycki, H., *Méthodes Topologiques et Problèmes Aux Limites non Linéaires*, Thèse de Doctorat, l'Université de Paris VI, 1975.
- [3] Fonseca, I.; Gangbo, W., *Degree Theory in Analysis and Applications*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1995.

Convergência Pontual da Série de Fourier

Felipe Felix Souto¹

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: A análise de Fourier tem sua importância na resolução de equações diferenciais parciais (EDPs) que modelam fenômenos tais como a condução de calor em uma barra, as vibrações transversais da corda e o equilíbrio de forças de uma membrana. Neste trabalho, construiremos os resultados necessários para provar a convergência pontual da série de Fourier, além de apresentarmos um exemplo de uma função contínua que possui série de Fourier divergente em um ponto.

Palavras-chave: Séries de Fourier; Convergência Pontual; Função Contínua

1 Introdução

No século XVII, com a criação do Cálculo Diferencial e Integral, o estudo de Equações Diferenciais foi motivado por suas inúmeras aplicações à mecânica de partículas. Com isso, a partir do século XVIII, iniciou-se a procura por modelos que representassem o estudo da mecânica contínua e de outras partes da física, como a termodinâmica, através de Equações Diferenciais. Entretanto, esses fenômenos só puderam ser expressos por meio de Equações Diferenciais Parciais. Os principais problemas abordados foram a condução de calor em uma barra, as vibrações transversais da corda e o equilíbrio de forças de uma membrana. Esses problemas podem ser resolvidos por meio do Método de Fourier e assim, é importante estudar os resultados presentes na Teoria da Análise de Fourier. O que faremos aqui é introduzir o conceito das Séries de Fourier, analisar as condições suficientes para que tais séries convirjam pontualmente, veja [1], e apresentar um exemplo em que a série diverge, baseado em [2].

¹Bolsista FAPESP, Processo 2015/00534-0

2 Conceitos Básicos

Definição 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, dizemos que f é uma função periódica de período T , quando: $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Definição 2. Dizemos que uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{L}^1 , quando for integrável e absolutamente integrável.

Observação 3. É possível mostrar que toda função contínua é uma função \mathcal{L}^1 .

Definição 4 (Série de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 e periódica de período $2L$. A série de Fourier que representa f é dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

onde os coeficientes a_n e b_n são denominados coeficientes de Fourier e são dados, para cada $n = 1, 2, \dots$, por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Definição 5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- (i) A função f será seccionalmente contínua quando tiver apenas um número finito de descontinuidades de primeira espécie em qualquer intervalo limitado;
- (ii) A função f será seccionalmente diferenciável quando for seccionalmente contínua e sua derivada também o for.

Enunciaremos aqui dois teoremas de convergência de séries que utilizaremos mais à frente:

Teorema 1 (Critério de Cauchy). *Uma sequência de funções $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy, isto é, $\forall \epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, para todo $x \in I$.*

Prova: Inicialmente suponha que $(f_n(x))$ convirja uniformemente para uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$: $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in I$. Essa afirmação vale também para $m > n_0$. Portanto:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall x \in I,$$

ou seja, é uma sequência de Cauchy.

Reciprocamente, suponha que a sequência de funções f_n seja de Cauchy. Assim, para cada $x \in I$, temos que os números $f_n(x)$ formam uma sequência de Cauchy de números reais, logo converge para um número que denominaremos por $f(x)$, para cada $x \in I$. Portanto, definimos a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in I$. Logo, f_n converge pontualmente para f . Para mostrar a convergência uniforme, seja $\epsilon > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in I$. Nesta desigualdade, fixando x e n , façamos $m \rightarrow \infty$ e obtemos: $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \forall x \in I$. Portanto, temos a convergência uniforme. ■

Observação 6. Note que o Critério de Cauchy é aplicável às séries, pois podemos considerar qualquer série como a sequência de suas somas parciais.

Teorema 2 (Teste M de Weierstrass). *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uma série de funções, onde $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas em um subconjunto $I \subset \mathbb{R}$. Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que:*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in I$$

e a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente e absolutamente em I .

Prova: Seja $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$. Para $n, p \in \mathbb{N}$, temos, pela convergência da série numérica, que dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que para $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| &\leq |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)| \\ &\leq M_n + M_{n+1} + \dots + M_{n+p} < \epsilon, \forall x \in I. \end{aligned}$$

Pelo Critério de Cauchy, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ convergem uniformemente. ■

3 Convergência pontual

Nesta seção, vamos mostrar que a série de Fourier de uma função converge pontualmente, sob certas condições. Para isto, provaremos o seguinte resultado que garante que toda função \mathfrak{L}^1 pode ser aproximada por uma função contínua.

Proposição 7. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathfrak{L}^1 , então dado $\epsilon > 0$, existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \epsilon$$

e $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

Prova: (i) Primeiramente, suponha que f seja limitada. Como f é integrável, existe uma partição de $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$, tal que

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2}, \quad (1.1)$$

onde $m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$, para cada $j = 1, 2, \dots, k$. Agora, considere a função escada $\chi(x) = m_j$, para $x_{j-1} \leq x < x_j$, que é integrável pois o conjunto de descontinuidade tem medida nula. Desta maneira, segue de (1.1) que:

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \chi(x) dx = \int_a^b [f(x) - \chi(x)] dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.2)$$

Para a construção de ψ , usaremos a seguinte ideia:

Temos que χ é uma função escada, logo, observando o gráfico, podemos associar vários retângulos. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, “transformaremos” os retângulos em trapézios cujos lados tem inclinação n (ângulo da base) e para cada gráfico, associaremos uma função que chamaremos ψ_n (veja Figura 1.1).

Desta maneira,

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{\text{tg}(n)}.$$

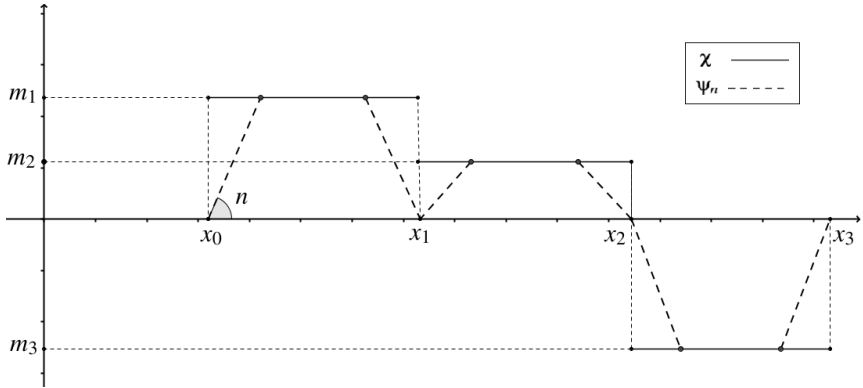


Figura 1.1: Construção de ψ_n

Além disso, f é limitada, então existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Disto, obtemos:

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx \leq \frac{KM^2}{\text{tg}(n)}.$$

Como K e M são constantes, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que:

$$\int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0. \quad (1.3)$$

Podemos concluir de (1.2) e (1.3) que, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 , de modo que existe uma função contínua $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx &\leq \int_a^b |f(x) - \chi(x)| dx \\ &\quad + \int_a^b |\chi(x) - \psi_n(x)| dx < \epsilon, \quad \forall n > n_0. \end{aligned}$$

- (ii) Suponha que f não seja limitada em $[a, b]$, mas integrável. Assim, suponha que f seja ilimitada apenas nas vizinhanças de a e b , caso tenha mais pontos, o tratamento será análogo. Desta forma, dado

$\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$\left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.4)$$

Como f é limitada e integrável em $[a+\delta, b-\delta]$, existe uma ψ contínua tal que:

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.5)$$

Basta definir, $\psi^1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como $\psi^1(x) = \psi(x)$, quando $a + \delta \leq x \leq b - \delta$ e $\psi^1(x) = 0$, quando $a \leq x \leq a + \delta$ ou $b - \delta \leq x \leq b$. Assim, de (1.4) e (1.5), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi^1(x)| dx &= \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx \\ &\quad + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)| dx < \epsilon, \end{aligned}$$

pois:

$$\left| \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx \right| = \left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right|. \blacksquare$$

Corolário 8. (i) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathfrak{L}^1 , então dado $\epsilon > 0$, existe uma sequência de funções contínuas $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi_n(x)| dx < \epsilon$$

e $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$.

(ii) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathfrak{L}^1 e periódica de período $2L$, então dado $\epsilon > 0$, existe uma sequência de funções contínuas periódicas, com o mesmo período de f , $\psi_n : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{-L}^L |f(x) - \psi_n(x)| dx < \epsilon$$

e $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$.

Lema 9 (Lema de Riemann–Lebesgue). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{L}^1 , então:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0; \tag{1.6}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{cos}(tx) dx = 0. \tag{1.7}$$

Prova: (a) Suponha, inicialmente, que f seja limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$. Como f é integrável, existe uma partição $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tal que $S[f, P] - s[f, P] < \frac{\epsilon}{2}$, onde $S[f, P]$ e $s[f, P]$ são as somas superior e inferior de f em relação à P , respectivamente. Além disso, sejam $M_j = \sup\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ e $m_j = \inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\}$. Provemos apenas que vale (1.6), pois (1.7) pode ser demonstrado de forma análoga.

Considere a seguinte partição de $[a, b] : x_j = a + \frac{j}{n}(b - a)$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Então:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx &= \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx. \end{aligned}$$

Como

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| = \left| \frac{\operatorname{cos}(tx_{j-1}) - \operatorname{cos}(tx_j)}{t} \right| \leq \frac{2}{t}$$

e $|f(x) - f(x_j)| < |M_j - m_j|, \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$, segue que :

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Observe que o somatório acima é a diferença $S[f, P] - s[f, P]$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S[f, P] - s[f, P] < \frac{\epsilon}{2}, \forall n > n_0$. Além disso, fixado n_0 , podemos considerar t_0 de modo que: $\frac{2n_0M}{t_0} < \frac{\epsilon}{2}$. E desta forma obtemos (1.6).

(b) Seja f uma função \mathcal{L}^1 qualquer. Dado $\epsilon > 0$, pela Proposição 7, existe $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso, toda função contínua é limitada e integrável em um compacto, então segue de (a) que existe t_0 tal que:

$$\left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall t > t_0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| &\leq \left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \\ &\quad + \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \epsilon, \quad \forall t > t_0. \end{aligned}$$

Logo, segue o resultado. ■

Definição 10. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$. A expressão:

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

é chamado de núcleo de Dirichlet de f .

Observação 11. Nas mesmas condições da definição acima, pode-se demonstrar usando a referência [1], as seguintes propriedades do núcleo de Dirichlet:

- (i) D_n é uma função par;
- (ii) $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$;
- (iii) D_n é periódica de período $2L$;
- (iv) $D_n(0) = \frac{n+\frac{1}{2}}{L}$;
- (v) D_n é uma função contínua;
- (vi) Vale a seguinte expressão para $x \neq 2kL, k \in \mathbb{Z}$:

$$D_n(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} x\right)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L} x\right)}. \quad (1.8)$$

Lema 12. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Considere s_n a n -ésima soma parcial da série de Fourier de f . Então a expressão:*

$$e_n(x) = s_n(x) - \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2},$$

pode ser escrita como:

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t) ([f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]) dt.$$

A prova do Lema 12 pode ser encontrada em [1].

Proposição 13 (Teste de Dini). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$. Defina $g(x, t) = [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]$. Fixado $x \in [-L, L]$, suponha que exista $\eta > 0$ tal que:*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt$$

exista. Então $e_n \rightarrow 0$, ou seja, $s_n \rightarrow \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Prova: Pelo Lema 12,

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t) ([f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]) dt.$$

Assim, podemos reescrever a expressão, utilizando (1.8), como:

$$e_n(x) = \int_0^\delta t D_n(t) \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt + \int_\delta^L \text{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} x \right) \frac{g(x, t)}{2L \text{sen} \left(\frac{\pi}{2L} x \right)} dt.$$

Para o cálculo da primeira integral, tomaremos $\delta > 0$ suficientemente pequeno, equanto que para a segunda, utilizaremos o Lema 9.

Primeiramente, observe que, como a função seno é contínua e crescente em $[0, L]$:

$$|t D_n(t)| \leq \left| \frac{t \text{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} t \right)}{2L \text{sen} \left(\frac{\pi}{2L} t \right)} \right| \leq \frac{t}{2L \text{sen} \left(\frac{\pi}{2L} t \right)} \leq \frac{1}{2}, \quad t \in [0, L].$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, considere $\delta < \min\{\eta, L\}$, então:

$$\int_0^\delta t D_n(t) \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.9)$$

Agora, fixado δ , vamos analisar a segunda integral. Para aplicar o Lema de Riemann-Lebesgue, devemos mostrar que:

$$h(t) = \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}t\right)}, \quad t \in [\delta, L]$$

é integrável. De fato, $g(x, t)$ e a função seno são integráveis e além disso, para $t \in [\delta, L]$, temos que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}t\right) \neq 0$. Desta maneira, para n suficientemente grande, temos:

$$\left| \int_{\delta}^L \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}x\right) \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2L}t\right)} dt \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.10)$$

Portanto, segue de (1.9) e (1.10) que, para x fixado:

$$e_n(x) < \epsilon.$$

Assim, $e_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, o que implica, pelo Lema 12, que $s_n \rightarrow \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Mostramos assim, a convergência da soma parcial da Série de Fourier. ■

Feito essa proposição, agora vamos considerar hipóteses em uma função para garantir a convergência pontual de sua série.

Definição 14. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação. A função f é Hölder contínua quando existem constantes reais não negativas $C, \alpha \in \mathbb{R}^*$ tais que para todos $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^{\alpha}.$$

Proposição 15. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, \mathfrak{L}^1 em $[-L, L]$ e Hölder contínua na vizinhança de um ponto x fixado, então a Série de Fourier de f converge pontualmente.

Prova: Como f é Hölder contínua em uma vizinhança de x , existem $\delta > 0$ e $C, \alpha \in \mathbb{R}^*$, tais que, $\forall t, s \in [x - \delta, x + \delta]$:

$$|f(t) - f(s)| \leq C |t - s|^{\alpha}.$$

Podemos observar que f é contínua em $[x - \delta, x + \delta]$, ou seja, $f(x + 0) = f(x - 0) = f(x)$. Além disso,

$$\begin{aligned} |g(x, t)| &\leq |f(x + t) - f(x)| + |f(x - t) - f(x)| \leq 2Ct^{\alpha} \Rightarrow \\ &\int_0^{\delta} \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq \int_0^{\delta} t^{\alpha-1} dt < \infty. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teste de Dini, segue o resultado e $s_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada x . ■

Vamos enunciar um resultado no caso em que f é diferenciável.

Corolário 16. *Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, \mathcal{L}^1 em $[-L, L]$, seja diferenciável em $x \in \mathbb{R}$. Então a Série de Fourier converge pontualmente.*

Prova: Como f é derivável em x , pelo Teorema do Valor Médio, $\forall t, s \in [x - \delta, x + \delta]$, existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $f(t) - f(s) = f'(c)(t - s)$. Assim, pela Proposição 15 segue o resultado. ■

Agora, enunciaremos o principal teorema sobre convergência pontual das Séries de Fourier.

Teorema 3 (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente diferenciável. Então sua Série de Fourier converge, em cada ponto x , para $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, ou seja,*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Prova: Como f é seccionalmente diferenciável, segue que:

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \quad \text{e} \quad f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x-t) - f(x)}{t}$$

existem, logo

$$\frac{g(x, t)}{t} = \frac{[f(x+t) - f(x)] + [f(x-t) - f(x)]}{t}$$

é limitada em $[-L, L]$. Então, estamos nas hipóteses da Proposição 13. Portanto, a série de Fourier de f converge pontualmente para a média dos limites laterais da f . E assim segue o resultado. ■

Até agora, vimos condições suficientes para que a Série de Fourier de uma função periódica convirja pontualmente. Entretanto, se uma função for contínua, podemos garantir a existência dos coeficientes de Fourier e até mesmo construir sua Série. Dito isso, será que é suficiente que a função seja contínua, para que tenha uma Série de Fourier pontualmente convergente? A resposta, infelizmente, é não e a justificativa vem no exemplo a seguir:

Exemplo 17 (Função contínua com série de Fourier divergente). Começaremos com o seguinte lema:

Lema 18. *O somatório*

$$\begin{aligned} \phi(n, r, x) = & \frac{\cos((r+1)x)}{2n-1} + \frac{\cos((r+2)x)}{2n-3} + \dots + \frac{\cos((r+n)x)}{1} \\ & - \frac{\cos((r+n+1)x)}{1} - \frac{\cos((r+n+2)x)}{3} - \dots - \frac{\cos((r+2n)x)}{2n-1} \end{aligned}$$

é limitado para todos $n, r \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Prova: Note que:

$$\begin{aligned} \phi(n, r, x) = & \sum_{v=1}^n \frac{\cos((r+n-v+1)x) - \cos((r+n+v)x)}{2v-1} = \\ & 2 \operatorname{sen} \left(\left(r + n + \frac{1}{2} \right) x \right) \sum_{v=1}^n \frac{\operatorname{sen}((v + \frac{1}{2})x)}{2v-1}. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável de $\lambda = 2v - 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \left(\left(r + n + \frac{1}{2} \right) x \right) \sum_{v=1}^n \frac{\operatorname{sen}((v + \frac{1}{2})x)}{2v-1} = \\ 2 \operatorname{sen} \left(\left(r + n + \frac{1}{2} \right) x \right) \sum_{\lambda=1}^{2n-1} \frac{\operatorname{sen}((\frac{\lambda}{2})x)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Observamos que (1.11) é limitado pois:

$$\sum_{\lambda=1}^{2n-1} \frac{\operatorname{sen}((\frac{\lambda}{2})x)}{\lambda} \quad (1.12)$$

converge uniformemente (veja Observação 19), logo é limitado, e como a função seno é limitada, concluímos a prova do lema. ■

Feito isso, denote por G_n o grupo dos $2n$ números:

$$\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-3}, \dots, \frac{1}{3}, 1, -1, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{2n-1}$$

e seja $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ uma sequência crescente de inteiros. Tome os números dos grupos $G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \dots$ em ordem e multiplique cada um dos números de G_{λ_v} por v^{-2} , obtendo a sequência $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\frac{1}{1^2(2\lambda_1-1)}, \dots, -\frac{1}{1^2(2\lambda_1-1)}, \frac{1}{2^2(2\lambda_2-1)}, \frac{1}{2^2(2\lambda_2-3)}, \dots$$

Agora, considere a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(\lambda_n, 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + 2\lambda_{n-1}, x)}{n^2}.$$

Pelo Lema 18 e pelo Teste de M Weierstrass, segue que a série converge uniformemente e absolutamente. Suponha que convirja para uma função $f(x)$ e além disso, como ϕ é contínua, então f também é contínua.

Observe que pelo fato de f ser contínua, podemos multiplicar por $\cos(mx)$ ou $\sin(mx)$ e integrar (como na construção dos coeficientes de Fourier de f), assim a integral de cada termo será zero, exceto nos termos da forma $\alpha_m \cos(mx)$, por causa da ortogonalidade, assim obtemos:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx = \alpha_m \pi \implies \alpha_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx.$$

Ou seja, os números α_n são os coeficientes de Fourier de f e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx)$ é a Série de Fourier de f .

Por fim, podemos escolher λ_v de modo que a série de Fourier seja divergente em $x = 0$. De fato, considere s_n a n -ésima soma parcial, então:

$$\begin{aligned} s_{2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_v} &= \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{2\lambda_v - 1} + \cdots + \frac{1}{3} + 1 \right) \\ &> \frac{1}{v^2} \int_0^{2\lambda_v} \frac{1}{x} dx = \frac{\ln(\lambda_v)}{v^2}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Desta maneira, se λ_v tender a infinito suficientemente rápido, por exemplo se $\lambda_v = v^{v^2}$. Neste caso, $s_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ para alguns valores da seqüência. Portanto a Série de Fourier diverge em $x = 0$.

Observação 19. Note que (1.11) converge uniformemente pois é a parte imaginária da série complexa abaixo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$$

que converge uniformemente, para $\theta \in [\epsilon, \pi]$ e $\epsilon > 0$, pois: seja $\epsilon > 0$, considere $\theta \in [\epsilon, \pi]$ e

$$E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{in\theta}$$

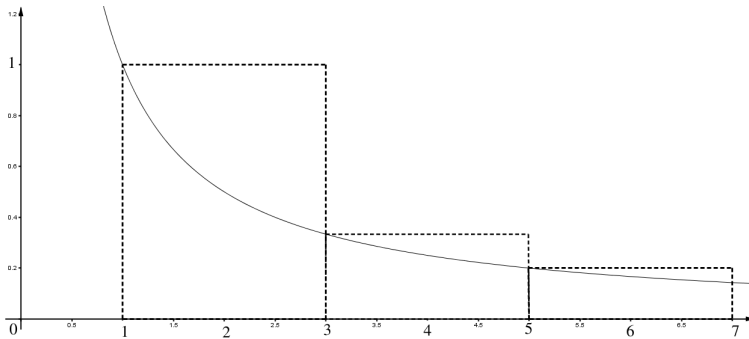


Figura 1.2: Aproximação do gráfico da função $\frac{1}{x}$ através dos números ímpares

e observe que, para $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)].$$

Além disso,

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j} E_j(\theta).$$

Então:

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right] E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta). \quad (1.14)$$

Note que:

$$|E_n(\theta)| = \frac{|e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}|} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}. \quad (1.15)$$

Por (1.14) e (1.15), temos que:

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \sin(\frac{\epsilon}{2})}.$$

Segue pelo Critério de Cauchy que a série converge uniformemente.

Agradecimentos: Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro; aos meus pais, Paulo e Audrey, por me fornecerem todo o suporte necessário durante meus anos de estudo, me dando muito amor e carinho; à Profa. Dra.

Suzinei Aparecida Siqueira Marconato por ter me introduzido à iniciação científica e por todos os conselhos; ao meu amigo Alex por ter me ajudado em todos os momentos difíceis dessa faculdade, pois por pior que fosse a situação sempre conseguia me fazer sorrir, se tornando uma pessoa muito importante; aos meus amigos Quédima, Maria, Brendol e Bianca pela companhia e que em tão pouco tempo já se tornaram tão importantes; e claro, à Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti que além da supervisão no trabalho, se tornou uma companheira e me mostrou que o estudo pode sempre se tornar divertido e surpreendente.

Abstract: The Fourier Analysis has its importance in the resolutions of partial differential equations (PDEs) representing some phenomena like heat conduction on a bar, transverse vibrations of the string and force equilibrium of a membrane. In this work, we will build necessary results to prove the pointwise convergence of the Fourier Series, besides presenting the example of a continuous function that the Fourier series diverges in a point.

Keywords: Fourier Series; Pointwise Convergence; Continuous Function.

Referências Bibliográficas

- [1] Figueiredo, Djairo Guedes de, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2003.
- [2] Titchmarsh, E.C., *The Theory of Functions*, Oxford University Press, 1952.
- [3] Lima, E. L, *Curso de Análise, v. 1.*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012

O Modelo Predador–Presa de Volterra

Felipe Longo

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Com este trabalho pretendemos apresentar uma importante aplicação de Equações Diferenciais Ordinárias envolvendo um sistema não linear de equações, no qual utilizaremos diversas técnicas matemáticas para o estudo das soluções.

Palavras-chave: modelo predador-presa, Volterra, equações diferenciais ordinárias

1 Introdução

Um problema real não pode ser representado de maneira exata por uma expressão matemática, porém, quando são consideradas as variáveis essenciais do fenômeno estudado, o modelo matemático que simula tal fenômeno poderá levar a soluções bem próximas das observadas na realidade. Quando medimos as variações das quantidades envolvidas no fenômeno e se tal fenômeno variar continuamente, então as equações diferenciais são ferramentas úteis no processo de modelagem. Neste trabalho utilizamos os métodos matemáticos das equações diferenciais no modelo *Predador–Presa de Volterra*.

1.1 Vito Volterra

Volterra foi um famoso matemático e físico italiano que fortemente influenciou o desenvolvimento moderno do cálculo. Doutor em Física pela Universidade de Pisa, onde foi professor de mecânica e chegou a ocupar a cadeira de Física Matemática. Foi nomeado catedrático de Mecânica em Turim e depois de Física Matemática em Roma. Em 1938, foi oferecido a ele um título honorário da Universidade de St. Andrews, porém seu médico não permitiu que fosse buscar. Volterra deu um total de quatro exposições plenárias em diversas edições do *International Congress of Mathematicians*, mais do que qualquer outro acadêmico na história. Volterra foi pioneiro no estudo das equações integrais, além de estudar a

relação entre a matemática e a biologia, a equação de Verhulst e as curvas logísticas. Além de escrever sobre equações *predador–presa*.



Figura 1.1: Vito Volterra (1860–1940)

2 O Modelo

O modelo *Predador–Presa* de Volterra estuda as interações entre a espécie das presas (x) e a dos predadores (y) envolvendo duas equações diferenciais, a da variação da população de presas e a da variação da população de predadores.

Para esse estudo, supõe-se que os meios de subsistência para as presas são ilimitados, isto é, não há competição por alimento entre elas, e que os predadores são o único fator inibidor do seu crescimento populacional. Logo, se não houvesse predadores, a população de presas cresceria de acordo com a taxa de variação dada pela equação $\frac{dx}{dt} = ax$, onde $a > 0$ é uma constante. Quanto aos predadores, supomos que eles se alimentam exclusivamente das presas, ou seja, sem elas, eles desapareceriam. Assim, se não houvesse presas, a população de predadores decresceria de acordo com a taxa de variação dada pela equação $\frac{dy}{dt} = -cy$, onde $c > 0$ é uma constante. Entretanto, o objetivo é estudar as leis de variação das populações considerando a interação entre as duas espécies.

3 Análise das Equações

As taxas de variação das populações são dadas pelas seguintes equações:

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x, \quad (1.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = (-c + dx)y, \quad (1.2)$$

onde $b > 0$ e $d > 0$ são constantes.

O número de encontros entre indivíduos das duas espécies em um intervalo unitário de tempo é proporcional a xy : digamos que seja igual a αxy . Esses encontros trazem resultados negativos para as presas – digamos que a população x diminui β_1 membros para cada n encontros. Logo, a população x diminui de $\frac{\beta_1}{n}\alpha xy \equiv bxy$ membros por unidade de tempo, explicando o uso do termo $-bxy$. Analogamente, esses encontros resultam benéficos para os predadores – digamos que a população y aumenta de β_2 membros para cada n encontros. Logo, a população y aumenta de $\frac{\beta_2}{n}\alpha xy \equiv dxy$ membros por unidade de tempo. Pode-se dizer, então, que o coeficiente b mede a susceptibilidade da espécie x às ações predatórias e o coeficiente d mede a habilidade predatória da espécie y .

4 Estudo da Curva e das Soluções

As equações (1.1) e (1.2) não podem ser resolvidas explicitamente em função de x e y , respectivamente. Porém, podemos considerar uma curva C no plano xy dada por $r(t) = (x(t), y(t))$. Assim, é possível determinar a equação cartesiana desta curva.

Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

De (1.1)-(1.2), obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-c + dx)y}{(a - by)x}.$$

Multiplicando os membros da equação por $(a - by)$ e dividindo por y , obtemos

$$\frac{(a - by)}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{(-c + dx)}{x}.$$

O método de separação de variáveis nos diz que

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \Rightarrow \int f(y) dy = \int g(x) dx.$$

Assim,

$$\int \frac{(a - by)}{y} dy = \int \frac{(-c + dx)}{x} dx.$$

Que equivale a

$$a \int \frac{1}{y} dy - \int b dy = -c \int \frac{1}{x} dx + \int d dx.$$

Resolvendo as integrais, obtemos

$$a \ln y - b y = -c \ln x + dx + M.$$

Considerando $M = \ln K$ e aplicando as propriedades de logaritmo, temos

$$\ln y^a - b y = \ln K x^{-c} + dx.$$

Aplicando a exponencial, chegamos à equação cartesiana de C

$$y^a e^{-b y} = K x^{-c} e^{dx}. \quad (1.3)$$

Considerando a equação (1.3) e a condição inicial $y(x_0) = y_0$, podemos determinar o valor da constante K ,

$$K = y_0^a e^{-b y_0} x_0^c e^{-d x_0}.$$

Porém, da equação (1.3), x e y não podem ser explicitados. Então, para podermos interpretar a interação entre as duas populações sem ter uma solução bem definida, estudamos o comportamento das soluções de (1.1)-(1.2) no plano xy , ou plano de fase. Inicialmente, devemos determinar as *singularidades*.

Definição 1. As soluções constantes $(x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$, as quais são os zeros do sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) = 0, \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = 0. \end{aligned}$$

são chamadas PONTOS DE EQUILÍBRIO – devido ao seu significado físico –, ou SINGULARIDADES (também PONTOS SINGULARES) – devido ao seu sentido geométrico. Os pontos não singulares são chamados *regulares*.

Pela definição, temos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (a - b y)x = 0, \\ \frac{dy}{dt} &= (-c + dx)y = 0. \end{aligned}$$

De onde obtemos os pontos singulares $(0, 0)$ e $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. A partir destes pontos, consideramos o vetor $\vec{v} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ e analisamos seu comportamento nas situações abaixo

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow \vec{v} = (0, 0) \quad (\text{I})$$

$$x = \frac{c}{d}, y = \frac{a}{b} \Rightarrow \vec{v} = (0, 0) \quad (\text{II})$$

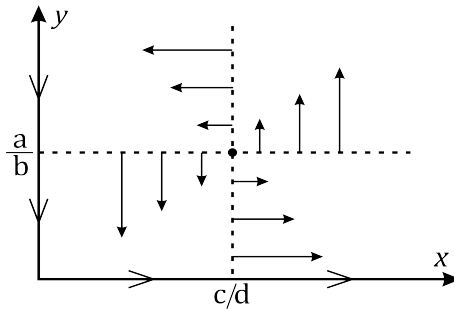
$$x = \frac{c}{d}, y > \frac{a}{b} \Rightarrow \vec{v} = (\frac{dx}{dt} < 0, 0) \quad (\text{III})$$

$$x < \frac{c}{d}, y = \frac{a}{b} \Rightarrow \vec{v} = (0, \frac{dy}{dt} < 0) \quad (\text{IV})$$

$$x = \frac{c}{d}, y < \frac{a}{b} \Rightarrow \vec{v} = (\frac{dx}{dt} > 0, 0) \quad (\text{V})$$

$$x < \frac{c}{d}, y < \frac{a}{b} \Rightarrow \vec{v} = (0, \frac{dy}{dt} < 0) \quad (\text{VI})$$

Assim, podemos construir o seguinte campo vetorial que mostra o comportamento da curva C



Para nosso estudo, é mais interessante fazer os estudos próximos da singularidade $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Para isso, fazemos a seguinte mudança de variáveis

$$u = x - \frac{c}{d}, \quad v = y - \frac{a}{b}.$$

Derivando u e v obtemos

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} \stackrel{(1.1)}{=} \left[a - b \left(v + \frac{a}{b} \right) \right] \left(u + \frac{c}{d} \right) = -b \left(u + \frac{c}{d} \right) v,$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} \stackrel{(1.2)}{=} \left[-c + b \left(u + \frac{c}{d} \right) \right] \left(v + \frac{a}{b} \right) = d \left(v + \frac{a}{b} \right) u.$$

Cuja parte linear é

$$\frac{du}{dt} = -\frac{bc}{d}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{ad}{b} u. \quad (1.4)$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}}.$$

E a partir de (1.4) obtemos

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{ad}{b} u}{-\frac{bc}{d} v} = \frac{ad^2 u}{-b^2 c v}.$$

Multiplicando ambos os lados da expressão por $-b^2 c v$ obtemos

$$(-b^2 c v) \frac{dv}{du} = ad^2 u.$$

Pelo método de separação de variáveis, temos que

$$\int -b^2 c v dv = \int ad^2 u du.$$

Resolvendo as integrais obtemos

$$-b^2 c v^2 + P = ad^2 u^2.$$

Chegamos então às expressões

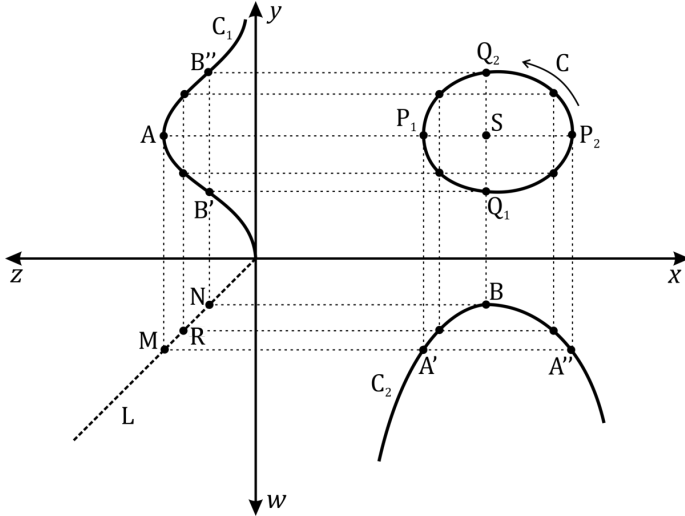
$$ad^2 u^2 + b^2 c v^2 = p^2,$$

que são elipses centradas no ponto singular $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Isto significa que as soluções de (1.1)–(1.2) têm a forma parecida de elipses na vizinhança deste ponto.

Como já temos ideia do comportamento das soluções próximas dos pontos singulares, para se ter uma ideia da curva C representada por (1.3) vamos usar um método gráfico devido a Volterra. Introduzimos duas novas variáveis

$$z = y^a e^{-by} \quad \text{e} \quad w = Kx^{-c} e^{dx}. \quad (1.5)$$

Traçamos os gráficos de z (C_1) e w (C_2) nos quadrantes (y, z) e (x, w) , respectivamente. E, como $z = w$, devemos exibir esta relação com a curva L no quadrante (w, z) .



Observe que z tem valor máximo quando $y = \frac{a}{b}$, assim, $z_{\max} = \left(\frac{a}{be}\right)^a$, de onde obtemos o ponto A . Já w tem valor mínimo quando $x = \frac{c}{d}$, assim, $w_{\min} = K \left(\frac{de}{c}\right)^c$, obtendo o ponto B . A partir destes dois pontos, da curva L e dos gráficos C_1 e C_2 podemos obter um esboço da curva C .

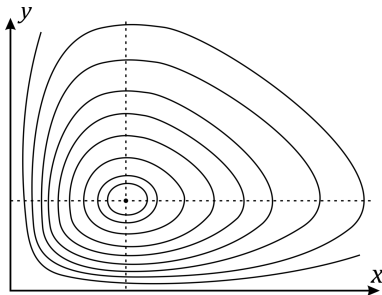
Para essa construção geométrica, seguimos os passos abaixo:

1. Traçamos uma reta paralela ao eixo Y passando por A e cortando a curva L no ponto M . E, então, traçamos uma reta paralela ao eixo X passando por M e cortando C_2 nos pontos A' e A'' , que são os limites entre os quais x pode variar.
2. Fazendo um processo análogo ao anterior, traçamos uma reta paralela ao eixo X passando por B e cortando a curva L em N . Então, traçamos uma reta paralela ao eixo Y passando por N e cortando C_1 nos pontos B' e B'' , que são os limites entre os quais y pode variar.
3. Agora, traçamos retas perpendiculares ao eixo Y passando por A , B' e B'' , e retas perpendiculares ao eixo X passando por B , A' e A'' . A intersecção da reta que passa por A com a que passa por B nos dá o ponto S , que é exatamente o ponto singular $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. A intersecção de A com A' e a com A'' nos dá os pontos P_1 e P_2 , respectivamente, e esses pontos são os extremos da órbita C na direção x . E a intersecção de B com B' e a com B'' nos dá os pontos Q_1 e Q_2 ,

respectivamente, e esses pontos são os extremos da órbita de C na direção y .

4. Para obter mais pontos da curva, basta tomar um ponto R qualquer de L entre M e N . Então traçamos duas retas passando por R , uma paralela ao eixo X e outra ao eixo Y . Obtemos, então, os pontos R_1, R_2, R_3 e R_4 . Depois, traçamos duas retas paralelas ao eixo X passando por R_1 e R_2 , respectivamente, e duas retas paralelas ao eixo Y passando por R_3 e R_4 , respectivamente. As intersecções destas quatro retas são quatro pontos da curva C dispostos entre P_1 e Q_1, Q_1 e P_2, P_2 e Q_2, Q_2 e P_1 .
5. Como consideramos R um ponto qualquer e ele nos levou a quatro pontos da curva, para obter a órbita inteira, basta considerar todos os pontos de \overline{MN} e eles nos levarão à trajetória completa da curva C .

Com essa construção, podemos observar que a curva não é necessariamente simétrica com relação ao eixo $x = \frac{c}{a}$ e $y = \frac{a}{b}$. Assim, as soluções na vizinhança do ponto $(\frac{c}{a}, \frac{a}{b})$ têm o aspecto indicado na figura a seguir.



E com todo o estudo feito até agora, podemos observar que as populações de predadores e de presas oscilam periodicamente na vizinhança deste ponto singular.

Como estamos estudando o comportamento das soluções próximas do ponto $(\frac{c}{a}, \frac{a}{b})$, então, para obter o período de oscilação das populações, podemos utilizar o sistema linear (1.4). Para isso, devemos derivar cada equação deste sistema, assim

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{-bc}{d} \frac{dv}{dt} = \frac{-bc}{d} \left(\frac{ad}{b} u \right) = -acu,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{ad}{b} \frac{du}{dt} = \frac{ad}{b} \left(\frac{-bc}{d} v \right) = -acv.$$

E, então, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + acu &= 0, \\ \frac{d^2v}{dt^2} + acv &= 0. \end{aligned}$$

Isto significa que $\frac{d^2u}{dt^2}$ e $\frac{d^2v}{dt^2}$ são proporcionais a u e v , respectivamente. Mas, em geral, para que isso ocorra, a derivada de segunda ordem da função tem que ser do “mesmo tipo” que a função. A função $e^{\alpha t}$, sendo α uma constante qualquer, é uma função que se encaixa nessa situação pois $\frac{d^2}{dt^2}(e^{\alpha t}) = \alpha^2 e^{\alpha t}$ é proporcional a $e^{\alpha t}$.

Assim, podemos considerar uma função $f(t) = e^{\alpha t}$ e verificar se ela é solução da equação

$$\frac{d^2f}{dt^2} + acf = 0. \quad (1.6)$$

Fazendo as devidas substituições

$$\begin{aligned} (\alpha^2 e^{\alpha t}) + ac(e^{\alpha t}) = 0 &\Leftrightarrow e^{\alpha t}(\alpha^2 + ac) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + ac = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = -ac \\ &\Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{-ac} = \pm i\sqrt{ac}, \end{aligned}$$

onde i é a unidade imaginária.

Assim, α pode assumir dois valores, $\alpha_1 = i\sqrt{ac}$ ou $\alpha_2 = -i\sqrt{ac}$. Isto significa que $f(t) = e^{\alpha t}$ é solução complexa de (1.6). Porém, $e^{\alpha t}$ não está bem definido. Para isto, lembremos que a exponencial na série de Taylor é dada por:

$$e^\gamma = 1 + \gamma + \frac{\gamma^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}, \forall \gamma \in \mathbb{C}. \quad (1.7)$$

Como α é um número imaginário puro, então podemos considerar $\beta = \pm\sqrt{ac}$ e aplicar $\gamma = i\beta t$ em (1.7) e então teremos

$$\begin{aligned} e^{i\beta t} &= 1 + i\beta t + \frac{(i\beta t)^2}{2!} + \frac{(i\beta t)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + i\beta t - \frac{(\beta t)^2}{2!} - i\frac{(\beta t)^3}{3!} + \frac{(\beta t)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{(\beta t)^2}{2!} + \frac{(\beta t)^4}{4!} + \dots \right) + i \left(\beta t - \frac{(\beta t)^3}{3!} + \frac{(\beta t)^5}{5!} + \dots \right), \end{aligned}$$

que é o mesmo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\beta t)^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\beta t)^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mas a série da parte real é a série de Taylor da função cosseno, e a série da parte imaginária é exatamente a série de Taylor da função seno, ou seja,

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t).$$

Assim, $e^{\alpha t} = e^{\pm i\sqrt{ac}t} = \cos(\pm\sqrt{ac}t) + i \operatorname{sen}(\pm\sqrt{ac}t)$. Portanto,

$$f(t) = \cos(\sqrt{ac}t) + i \operatorname{sen}(\sqrt{ac}t)$$

é uma solução complexa bem definida de (1.6). Além de que tanto a parte real quanto a parte imaginária de uma solução complexa são soluções reais da equação (1.6). Logo, $f_1(t) = \cos(\sqrt{ac}t)$ e $f_2(t) = \operatorname{sen}(\sqrt{ac}t)$ são possíveis soluções de (1.6). Ou, ainda, podemos considerar uma família de soluções dadas por $f_1(t) = L_1 \cos(\sqrt{ac}t + \omega)$ e $f_2(t) = L_2 \operatorname{sen}(\sqrt{ac}t + \omega)$.

Voltando ao sistema linear (1.4), temos as possíveis soluções

$$u(t) = L_1 \cos(\sqrt{ac}t + \omega) \quad \text{e} \quad v(t) = L_2 \operatorname{sen}(\sqrt{ac}t + \omega). \quad (1.8)$$

Assim, podemos determinar o período com o qual as soluções próximas do ponto singular oscilam. Por propriedade das funções seno e cosseno, temos que o período é dado por

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}.$$

Como podemos ver, o período depende apenas das taxas de crescimento das populações.

5 Conclusões

Os resultados que descrevemos foram desenvolvidos por Volterra para explicar um fenômeno observado por D'Ancona, relacionado à percentagem de peixes de várias espécies capturados no Adriático, durante e após a primeira guerra mundial.

A aplicação estudada é um exemplo de um sistema não linear de equações diferenciais, o qual envolve algumas técnicas matemáticas para entender o comportamento das duas populações envolvidas e a forma como interagem com o passar do tempo.

No estudo de sistemas como o (1.1)–(1.2), aprendemos a analisar o comportamento das soluções próximas dos pontos singulares, que são os zeros do sistema. Vimos a importância das soluções periódicas em nossa análise. E como as equações não lineares não têm uma estrutura simples e nem mesmo uma “solução geral”, percebemos como pode ser útil o estudo dos sistemas não lineares através de uma aproximação pelo sistema linear.

Agradecimentos: Agradeço ao IGCE e ao Departamento de Matemática pelo espaço cedido para a realização dos seminários. E agradeço à professora Marta por me orientar com tanta atenção e paciência ao longo do projeto.

Abstract: In this work, we pretend to show an important application of Ordinary Differential Equations involving a nonlinear system of equations, in which we use several mathematical techniques to the study of the solutions.

Keywords: predator–prey model, Volterra, ordinary differential equations

Referências Bibliográficas

- [1] Figueiredo, D. G. de e Neves, A. F. - *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq (1997), pp. 257–262.
- [2] Simmons, G. F. e Krants, S. G. - *Equações Diferenciais: teoria, técnica e prática*. São Paulo, McGraw-Hill (2008), pp. 383–388.
- [3] The Editors of The Encyclopædia Britannica - *Vito Volterra: italian mathematician*. Disponível em: <http://www.britannica.com/biography/Vito-Volterra>. Acessado em: 10 ago. 2015.
- [4] Braun, M. - *Equações diferenciais e suas Aplicações*. Rio de Janeiro, Editora Campus (1979), pp. 111–117.

Soluções para Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

Fernanda Andrade da Silva¹

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar o teorema de existência e unicidade para o caso linear e mostrar alguns exemplos de Problema de Cauchy em que temos infinidade de soluções e casos em que não existe solução.

Palavras-chave: equações diferenciais; problema de Cauchy; soluções.

1 Introdução

Uma diferença importante entre EDO (equações diferenciais ordinárias) e EDP (equações diferenciais parciais) é a informação suplementar necessária para a unicidade no caso em que estamos considerando. Por exemplo, na solução geral de uma EDO linear aparecem uma ou mais constantes arbitrárias onde podemos determiná-las impondo condições iniciais, isto é, fixando os valores da solução e de suas derivadas até certa ordem em um determinado ponto. A situação para as EDP é fundamentalmente diferente: mesmo no caso linear, a solução geral, quando é possível achá-la, envolve funções arbitrárias das variáveis independentes.

Como no caso de EDP temos mais de uma variável dependente (por exemplo x, t), é natural fixar uma das variáveis (por exemplo $t = 0$) e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis (por exemplo $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$, f e g funções dadas.) Podemos generalizar o conceito de condições iniciais impondo o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva (se $n = 2$) ou superfície (se $n = 3$) inicial, o problema correspondente é um **problema de Cauchy**.

¹Bolsista PET

2 Fatos Básicos de EDP

Apresentaremos primeiramente alguns conceitos e resultados para o desenvolvimento da teoria de equações diferenciais parciais.

Uma **equação diferencial parcial (EDP)** é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_n e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. De maneira mais precisa, uma EDP em n variáveis independentes é uma equação da forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0,$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , F é uma função dada e $u = u(x)$ é uma função que queremos determinar.

A **ordem** de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação, por exemplo, a ordem da equação anterior é k . Uma EDP é dita **linear** se é de primeiro grau em u e em todas suas derivadas parciais que ocorrem na equação. A forma mais geral de um EDP linear de primeira ordem é

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) D_j u + b(x)u + c(x) = 0,$$

em que algum coeficiente a_j não é identicamente nulo.

Definimos as **curvas características planas** para a equação

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y) \quad (1.1)$$

como sendo as curvas $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s))$ que têm tangente no ponto $(\alpha(s), \beta(s))$ paralela ao vetor $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$ ou equivalentemente, que satisfazem

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Exemplo 1. Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_y &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ u(x, p(x)) &= f(x), x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ são funções dadas.

Note que esse é um problema de Cauchy e a função u que queremos encontrar é conhecida ao longo da curva inicial $y = p(x)$.

A EDP em (1.3) é bem simples, como a derivada parcial de u em relação a y é identicamente nula, vemos que u é constante como função de y , ou seja, u depende apenas de x . Em outras palavras, a solução geral da EDP em (1.3) é

$$u(x, y) = g(x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.4)$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R})$ é arbitrária.

Neste trabalho procuraremos soluções clássicas, isto é, $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Como (1.4) é válida para qualquer par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tomando $y = p(x)$ obtemos

$$g(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

isto é, a solução do problema (1.3) é dada por

$$u(x, y) = f(x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.5)$$

O Problema de Cauchy

Vamos estudar o problema de Cauchy para equações da forma

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y). \quad (1.6)$$

Como vimos no exemplo anterior, existe uma relação entre a curva plana inicial γ e a região aberta $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ onde queremos não só a existência mas unicidade da solução: a região Ω tem que ser coberta por curvas características planas que intersectam a curva γ em exatamente um ponto. Parametrizando a curva γ por $(\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, onde I é um intervalo aberto, podemos escrever o problema na forma

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), \quad t \in I. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Teorema 2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, γ uma curva suave em Ω parametrizada por $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, $f \in C^1(I)$ e $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Suponha que $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 \neq 0, \forall (x, y) \in \Omega$ e*

$$\left| \begin{array}{cc} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{array} \right| \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

Então o problema (1.7) tem uma única solução de classe C^1 em uma vizinhança da curva γ em Ω dada por

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0)) ds.$$

Demonstração. Primeiramente, acharemos as curvas características planas da equação (1.6), isto é, as curvas ao longo das quais a EDP pode ser escrita como uma derivada total. Se ζ é uma curva plana parametrizada por $(\alpha(s), \beta(s))$, então a derivada total de u ao longo de ζ é, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s)u_x(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s)u_y(\alpha(s), \beta(s)). \quad (1.8)$$

Por outro lado, a EDP (1.6) ao longo de ζ é

$$a(\alpha(s), \beta(s))u_x(\alpha(s), \beta(s)) + b(\alpha(s), \beta(s))u_y(\alpha(s), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(s)). \quad (1.9)$$

Portanto, se queremos que o lado esquerdo da equação (1.9) seja igual a qualquer uma das expressões em (1.8), é preciso que para cada s , exista um número real $\lambda(s) \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s); \end{aligned} \quad (1.10)$$

nesse caso a equação fica

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \lambda(s)c(\alpha(s), \beta(s)). \quad (1.11)$$

As condições (1.10) significam, geometricamente, que o vetor tangente à curva ζ no ponto $(\alpha(s), \beta(s))$ é paralelo ao vetor tangente à curva ζ no ponto $(\alpha(s), \beta(s))$,

$$(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s))).$$

AFIRMAÇÃO: A função λ é desnecessária.

De fato, basta reparametrizar a curva convenientemente. Como a função λ é contínua, pois a curva ζ é suave por hipótese e as funções a e b não se anulam simultaneamente, tomemos a primitiva Λ de λ . Como $\Lambda'(s) = \lambda(s) \neq 0$, qualquer que seja s , $\Lambda'(s) > 0$ ou $\Lambda'(s) < 0$ para todo s , logo Λ é uma função monótona crescente ou decrescente, portanto inversível e podemos fazer a seguinte mudança de variável $s = \Lambda^{-1}(t)$ ou $t = \Lambda(s)$ para obter uma nova parametrização $(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t))$ da curva ζ , onde

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t) &= \alpha(s) = \alpha(\Lambda^{-1}(t)), \\ \tilde{\beta}(t) &= \beta(s) = \beta(\Lambda^{-1}(t)). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Então, por (1.12) e (1.11) obtemos

$$\tilde{\alpha}'(t) = \alpha' \frac{ds}{dt} = \alpha'(s) \frac{1}{\Lambda'(\Lambda^{-1}(t))} = \frac{\alpha'(s)}{\lambda(s)} = a(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)),$$

e, analogamente,

$$\tilde{\beta}'(t) = \frac{\beta'(s)}{\lambda(s)} = b(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)).$$

Portanto as **curvas características planas** da equação (1.6) são as curvas suaves ζ que admitem parametrização $(\alpha(s), \beta(s))$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)). \end{aligned} \tag{1.13}$$

O sistema de EDO dado por (1.13) tem uma infinidade de soluções: para obter uma única solução é preciso dar um par de condições iniciais. Como $a, b \in C^1(\Omega)$, dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe uma solução $(\alpha(s), \beta(s))$ de (1.13) para s em uma vizinhança de s_0 tal que

$$\alpha(s_0) = x_0, \beta(s_0) = y_0. \tag{1.14}$$

Vamos supor que a curva inicial γ nunca é tangente às curvas características planas, ou seja, o vetor tangente $(\sigma'(t), \rho'(t))$ nunca é paralelo a $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$, logo tais vetores são linearmente independentes para todo t em I . Então, para cada $t \in I$, existe uma única curva característica plana passando pelo ponto $(\sigma(t), \rho(t))$, ou seja, que é solução de (1.13) e (1.14) com $x_0 = \sigma(t), y_0 = \rho(t)$ em uma vizinhança de s_0 (que vamos tomar igual a zero para simplificar a notação), além disso $(\sigma(t), \rho(t))$ é o único ponto de interseção de γ com as características pois, se existisse outro, em algum lugar os vetores tangentes às duas curvas seriam paralelos, o que contradiz a hipótese. Nesse caso podemos então cobrir uma vizinhança da curva γ com curvas características planas que intersectam a curva γ em exatamente um ponto. Isso nos permite fazer uma mudança de variável de (x, y) para (s, t) para cada $t \in I$, se denotarmos a curva característica plana que passa por $(\sigma(t), \rho(t))$ por $(x(s, t), y(s, t))$, então o sistema (1.13) e as condições (1.14) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} x_s(s, t) &= a(x(s, t), y(s, t)), & y_s(s, t) &= b(x(s, t), y(s, t)), \\ x(0, t) &= \sigma(t), & y(0, t) &= \rho(t); \end{aligned} \tag{1.15}$$

além disso, como os vetores

$$(\sigma'(t), \rho'(t)) \quad \text{e} \quad (a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$$

são linearmente independentes,

$$\det \begin{pmatrix} x_s(0, t) & x_t(0, t) \\ y_s(0, t) & y_t(0, t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & \sigma'(t) \\ b(\sigma(t), \rho(t)) & \rho'(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

e portanto, por continuidade,

$$\det \begin{pmatrix} x_x & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} \neq 0$$

em uma vizinhança de γ . Logo a transformação

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$$

é localmente injetora, o que nos permite fazer a mudança de variável

$$v(s, t) = u(x, y). \quad (1.16)$$

Obtemos, pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= a(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \\ &\quad + b(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial u}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Substituindo a EDP (1.6) em (1.17), obtemos

$$v_s = c(x(s, t), y(s, t)).$$

Além disso a condição do problema inicial (1.7) fica

$$v(0, t) = f(t), \quad t \in I,$$

logo o problema que v satisfaz é

$$\begin{aligned} v_s &= c(x(s, t), y(s, t)), \\ v(0, t) &= f(t), \quad t \in I. \end{aligned} \quad (1.18)$$

cada $t \in I$ fixo, o problema (1.18) é um problema de valor inicial para uma EDO de primeira ordem, cuja solução é obtida integrando diretamente de 0 a s :

$$v(s, t) = \int_0^s v_\nu(\nu, t) d\nu + v(0, t) = \int_0^s c(x(\nu, t), y(\nu, t)) d\nu + f(t). \quad (1.19)$$

Para voltar para u , dado (x_0, y_0) , seja $t_0 = t(x_0, y_0)$ e $s_0 = s(x_0, y_0)$, isto é, $x_0 = x(s_0, t_0)$ e $y_0 = y(s_0, t_0)$; substituindo (1.16) em (1.19), obtemos

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0)) ds. \quad (1.20)$$

Note que, se u é solução de (1.7) então u satisfaz (1.20), como (1.20) é de fato solução de (1.7), pois (1.19) é solução de (1.18), a solução do problema (1.7) é única. ■

3 Equações de Primeira Ordem

Definimos anteriormente as curvas características planas para a equação (1.1). Se a curva inicial $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, não é tangente às curvas características planas, pelo Teorema 11 o problema

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y) \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), \quad t \in I, \end{aligned} \quad (1.21)$$

tem uma única solução. Veremos o que acontece se a curva inicial γ é uma curva característica plana. Esperamos que o problema não tenha solução ou tenha uma infinidade de soluções. De fato é isso o que acontece e o que diferencia um caso do outro é o conceito de curva característica espacial.

Uma **curva característica** para a equação (1.1) é uma curva suave $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \xi(s)) \in \mathbb{R}^3$ que tem tangente no ponto $(\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$ paralela ao vetor $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)), c(\alpha(s), \beta(s)))$; equivalentemente, α, β, ξ satisfazem

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)), \\ \xi'(s) &= c(\alpha(s), \beta(s)). \end{aligned} \quad (1.22)$$

No caso em que a curva inicial γ não é tangente às curvas características planas, a superfície solução é gerada pela curva $\Gamma : t \in I \mapsto (\sigma(t), \rho(t), f(t))$

e pelas curvas características em \mathbb{R}^3 que intersectam Γ . De fato, dada uma característica de (1.1) que intersecta Γ no ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0))$, podemos achar uma parametrização $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$ dessa curva satisfazendo (1.22) com

$$(\alpha(0), \beta(0), \xi(0)) = (\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0)), \quad (1.23)$$

logo a característica plana que passa pelo ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ é precisamente $(x(s, t_0), y(s, t_0)) = (\alpha(s), \beta(s))$ e portanto, usando a equação (1.20) temos que

$$\begin{aligned} u(\alpha(s), \beta(s)) &= f(t_0) + \int_0^s c(\alpha(\nu), \beta(\nu)) d\nu \\ &= f(t_0) + \int_0^s \xi'(\nu) d\nu = f(t_0) + \xi(s) - \xi(0) = \xi(s) \end{aligned}$$

por (1.23), o que prova que essa característica está na superfície solução, por outro lado, a superfície solução é parametrizada por

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), v(s, t))$$

e, para cada t_0 fixo, definindo

$$\alpha(s) = x(s, t_0), \quad \beta(s) = y(s, t_0), \quad \xi(s) = v(s, t_0),$$

as equações (1.15) e (1.18) mostram que α, β e ξ satisfazem (1.22) e (1.23) e portanto, para cada t_0 fixo, a curva $s \mapsto (x(s, t_0), y(s, t_0), v(s, t_0))$ é uma curva característica que intersecta Γ em $s = 0$, o que prova que a superfície solução é de fato gerada por Γ e pelas curvas características.

Veremos agora o caso em que γ é a uma curva característica plana: mostremos que se Γ é uma característica, o problema tem uma infinidade de soluções e se, Γ não é característica, o problema não tem solução.

Vamos supor primeiro que Γ é uma característica para a EDP (1.1). Seja δ uma curva plana qualquer que nunca é tangente às características planas e que intersecta γ no ponto $(\sigma(s_0), \rho(s_0))$, seja $t \mapsto (p(t), q(t))$ uma parametrização de δ com

$$(p(0), q(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0)) \quad (1.24)$$

e seja r uma função arbitrária de classe C^1 satisfazendo

$$r(0) = f(s_0). \quad (1.25)$$

Assim, o problema

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y) \\ u(p(t), q(t)) &= r(t) \end{aligned} \quad (1.26)$$

tem uma única solução u em uma vizinhança de δ ; além disso, a superfície solução contém a curva $\Delta : t \mapsto (p(t), q(t), r(t))$ e contém todas as características da EDP que intersectam Δ ; em particular, a superfície solução contém Γ pois

$$(p(0), q(0), r(0)) = (\sigma(s_0), \rho(s_0), f(s_0)) \in \Delta \cap \Gamma$$

por (1.24) e (1.25). Portanto u é solução de (1.5). Como existe uma infinidade de escolhas possíveis para a curva δ e a função r , o problema tem uma infinidade de soluções.

Vamos supor agora que γ é uma curva característica plana mas Γ não é uma característica para (1.1). Suponha, por absurdo, que o problema (1.21) tem solução nesse caso: se u é solução, qualquer que seja $t \in I$, derivando a condição inicial obtemos

$$\sigma'(t)u_x(\sigma(t), \rho(t)) + \rho'(t)u_y(\sigma(t), \rho(t)) = f'(t); \quad (1.27)$$

por outro lado, a EDP (1.1) no ponto $(\sigma(t), \rho(t))$ fica

$$a(\sigma(t), \rho(t))u_x(\sigma(t), \rho(t)) + b(\sigma(t), \rho(t))u_y(\sigma(t), \rho(t)) = c(\sigma(t), \rho(t)); \quad (1.28)$$

comparando (1.27) e (1.28) e usando o fato que os vetores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ e $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ são paralelos (pois γ é característica plana), obtemos que os vetores em \mathbb{R}^3

$$(\sigma'(t), \rho'(t), f'(t)) \quad \text{e} \quad (a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)), c(\sigma(t), \rho(t)))$$

também são paralelos, isto é Γ é uma curva característica, o que contradiz a hipótese. Portanto o problema (1.21) não tem solução nesse caso.

Exemplo 3. Considere o problema

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Neste caso as características planas são retas horizontais, logo o problema tem solução se, e somente se, a curva $\Gamma : t \mapsto (t, 0, f(t))$ é uma característica, isto é, os vetores $(1, 0, 2t)$ e $(1, 0, f'(t))$ são paralelos, o que equivale a

$$f'(t) = 2t \Leftrightarrow f(t) = t^2 + c, \quad c \text{ constante.}$$

Logo o problema só tem solução se $f(x) = x^2 + c$ para alguma constante c : nesse caso, tomando a curva δ como sendo o eixo dos y e $r(y)$ de classe C^1 com

$$r(0) = f(0) = c, \quad (1.30)$$

obtemos

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \\ u(0, y) &= r(y) \end{aligned}$$

cuja solução é

$$u(x, y) = u(0, y) + \int_0^x 2t dt = r(y) + x^2.$$

Portanto, no caso em que $f(x) = x^2 + c$ o problema tem como solução todas as funções da forma

$$u(x, y) = r(y) + x^2$$

onde r é de classe C^1 e satisfaz (1.30).

Agradecimentos: Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti pelo apoio e supervisão do trabalho e ao grupo PET pelo apoio financeiro.

Abstract: The objective of this paper is to present the existence and uniqueness theorem for the linear case and show some examples of Cauchy problem where we have infinity of solutions and where there is no solution.

Keywords: differential equations, Cauchy problem, solutions

Referências Bibliográficas

- [1] Iório, V. *EDP Um Curso de Graduação*, 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

Estabilidade de Sistemas Não Lineares Autônomos e Aplicação em Epidemiologia

Gabriela Lopes Theodoro¹

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: A maioria das equações diferenciais não pode ser resolvida analiticamente e assim é importante considerarmos as informações qualitativas da equação, sem de fato resolvê-las. Desta forma, este trabalho é destinado ao estudo de sistemas autônomos não lineares e alguns resultados da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias.

Palavras-chave: equações diferenciais, estudo qualitativo, modelo *SIR*.

1 Sistemas Autônomos e Estabilidade

Equações diferenciais ordinárias de ordem n em geral podem ser representadas por um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Para isso, consideremos D_f um aberto de R^{n+1} e $f : D_f \rightarrow R^{n+1}$ uma função contínua. Uma equação de ordem n é dada por

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n+1)}).$$

Fazendo

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)},$$

resulta no sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.1)$$

que pode ser representando por

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.2)$$

¹bolsista PET

onde

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ e } f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

onde as $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ são funções definidas em D_f .

Definição 1. Uma solução para o sistema (1.2) em um intervalo da reta I é uma função vetorial $\phi(t)$, diferenciável, onde $\phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ e ϕ_i é definida em $I \subset \mathbb{R}$ e ϕ satisfaz o sistema (1.2) em I .

Definição 2. Um sistema de equações de primeira ordem é chamado autônomo quando as funções f_i , $f_i : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com D_f aberto, $i = 1, \dots, n$ não dependem explicitamente de t , isto é,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.4)$$

Definição 3. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto crítico ou de equilíbrio de um sistema autônomo se $f_i(x) = 0, i = 1, \dots, n$.

Trabalharemos o ponto crítico $x = 0$, caso não tenhamos esta situação podemos realizar uma mudança de variável de forma que $x = 0$ se torna o ponto de equilíbrio.

As soluções constantes de um sistema autônomo desempenham um papel importante no estudo do comportamento do sistema, pois as outras soluções tendem a se aproximar ou afastar das mesmas, e $x(t) = c$ é solução de (1.4) se, e somente se, $\dot{x}(t) = f(x(t)) = f(c) = 0$, o que nos leva a seguinte definição:

Definição 4. Um ponto crítico x^* do sistema autônomo é dito **estável** se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda solução $\phi(t)$ do sistema que satisfaz, em $t = t_0$, $|\phi(t_0) - x^*| < \delta$ existe para todo t e satisfaz para todo $t \geq t_0$, $|\phi(t) - x^*| < \varepsilon$.

Se não for estável, o ponto crítico é dito **instável**.

Definição 5. Um ponto crítico x^* do sistema autônomo é dito **assintoticamente estável** se é estável e se existe $\delta_0 > 0$ tal que se $x = \phi(t)$ solução do sistema que satisfaz $|\phi(t_0) - x^*| < \delta_0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = x^*$.

Neste caso, além de ter estabilidade, a solução que se inicia em uma vizinhança de x^* , tende a x^* com o passar do tempo.

No cenário dos sistemas de equações diferenciais, a estabilidade é definida com relação a um dado ponto de equilíbrio. Em muitas aplicações na Biologia, Economia, Física, Engenharia, etc, é desejável que todos as soluções de um sistema tendam a seu ponto de equilíbrio, como nem sempre iremos obter uma solução analiticamente, uma maneira de analisar o comportamento dessas soluções é através de seus pontos de equilíbrio.

2 Caso Linear

Considere o sistema linear de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.5)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, A é uma matriz constante $n \times n$. Mostra-se que a solução do sistema linear (1.7) com a condição inicial $x(0) = x_0$ é dada por $x(t) = e^{At}x_0$ onde e^{At} é uma função matricial $n \times n$ definida pela série de Taylor, isto é, as soluções são da forma $x = ve^{\lambda t}$ onde λ é um autovalor de A e v um autovetor associado. Agora, vejamos alguns resultados para o estudo qualitativo desse tipo de sistema.

Teorema 6. *Seja A uma matriz com coeficientes constantes*

$$\phi(t) = e^{At} \quad (1.6)$$

é matriz fundamental de $y' = Ay$ com $\phi(0) = Id$ em $(-\infty, \infty)$.

A demonstração do teorema acima é encontrada em [2]. Com esse resultado temos que a solução ϕ satisfaz

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t} \left(\sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{t^i}{i!} (A - \lambda_j Id)^i \right) v_j, \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.7)$$

Teorema 7. *Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são autovalores distintos de A , onde λ_j tem multiplicidade n_j e $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ e se ρ é um número grande*

então a parte real de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, é tal que

$$\rho > \max_{j=1, \dots, k} \{\operatorname{Re}(\lambda_j)\}, \quad (1.8)$$

então existe uma constante $k > 0$ tal que

$$|e^{tA}| \leq ke^{\rho t}, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (1.9)$$

Prova: Sabemos que e^{At} é matriz fundamental de (1.7). Combinando este fato com a fórmula (1.7) para alguma solução $\phi(t)$ do sistema, vimos que cada elemento da matriz e^{At} é da forma $\sum_{j=1}^k p_j(t)e^{\lambda_j t}$, onde p_j é um polinômio de grau no máximo $(n_j - 1)$.

Se ρ é escolhido para satisfazer a equação (1.8) então $|t^k e^{\lambda_j t}| = t^k e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} < e^{\rho t}$ para t tão grande quanto se queira e cada termo da soma $\sum_{j=1}^k \rho_j(t)e^{\lambda_j t}$ é no máximo $Me^{\rho t}$ ($0 \leq t < \infty$) para alguma constante M . Como existem no máximo n^2 termos da matriz e^{At} , (1.9) mantém com $k = \overline{M}n^2$, onde \overline{M} é o maior dos n^2 valores de M .

Podemos observar também que a constante ρ em (1.9) pode ser escolhida como qualquer número maior ou igual ao maior de $\operatorname{Re}(\lambda_1), \dots, \operatorname{Re}(\lambda_j)$ uma vez que todo autovalor cuja parte real é igual a este máximo. Em particular, isto é, sempre verdade se todos os autovalores de A são simples. ■

Corolário 8. *Se todos os autovalores de A tem parte real negativa então toda solução $\phi(t)$ de (1.7) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Mais precisamente, existem constantes $\bar{k} > 0$ e $\sigma > 0$ tais que*

$$|\phi(t)| \leq \bar{k}e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0. \quad (1.10)$$

Prova: A existência das constantes \bar{k} e σ é garantida pelo Teorema 7, já que pelo Teorema 6, podemos escrever $\phi(t) = e^{At}$. Assim basta fazer $t \rightarrow \infty$ em (1.10) para obtermos o resultado. ■

Teorema 9. *Se todos os autovalores de A tem partes reais não positivas e todos esses autovalores com parte real nula são simples, então a solução $y = 0$ de $x' = Ax$ é estável. Se todos os autovalores de A tem partes reais negativas, a solução $x = 0$ é assintoticamente estável. E se todos os autovalores de A tem parte real positiva, então a solução $x = 0$ é instável.*

Prova: Usando o Teorema 6, qualquer solução $\phi(t)$ de $x' = Ax$ tem a forma $\phi(t) = Ce^{At}$.

Pelo Teorema 7 existem constantes $k > 0$ e ρ como em (1.8) tal que

$$|\phi(t)| \leq ke^{\rho t}, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (1.11)$$

Se todos os autovalores de A tiverem parte real negativa o resultado segue do Corolário (8).

O caso em que todos os autovalores tem parte real positiva, segue de (1.11) já que, quando $t \rightarrow \infty$ a solução $\phi(t)$ afasta da solução $x = 0$, portanto a solução nula é instável.

Agora se os autovalores tiveram parte real negativa ou nula então $\rho \leq 0$.

Se $\rho < 0$, segue o resultado, se $\rho = 0$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ tal que se $|y_0| < \delta$ então

$$|\phi(t, t_0, x_0)| = |x_0 e^{(t-t_0)A}| \leq |x_0|k < \delta k = \frac{\varepsilon}{k}k = \varepsilon.$$

Portanto a solução nula é estável. ■

3 Caso Não linear

A análise é realizada considerando a linearização do sistema utilizando a fórmula de Taylor. Linearizamos o sistema em torno de cada ponto de equilíbrio. Vejamos como: considerando-se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ e o sistema não linear autônomo:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.12)$$

onde

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Assumindo que x^* seja um ponto de equilíbrio deste sistema, temos $f(x^*) = 0$. Fazendo

$$x(t) = x^* + \Delta(t), \quad (1.13)$$

onde $\Delta(t)$ é um vetor que representa uma pequena perturbação em relação ao equilíbrio x^* , substituindo (1.13) em (1.12) tem-se:

$$\frac{d}{dt}(x^* + \Delta(t)) = f(x^* + \Delta(t)). \quad (1.14)$$

Utilizando a fórmula de Taylor para expandir (1.14) em torno de x^* fica-se com

$$\Delta'(t) = f(x^*) + Df(x^*)\Delta(t) + o(\Delta(t)),$$

onde $Df(x^*)$ é uma matriz $n \times n$ cujos elementos são $[Df(x^*)]_{ij} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{x=x^*}$.

Logo, desprezando-se os termos não-lineares e lembrando que $f(x^*) = 0$, fica-se com o sistema linearizado $n \times n$:

$$\Delta'(t) = Df(x^*)\Delta(t),$$

onde $Df(x^*)$ é a matriz jacobiana calculada no ponto x^* .

O conhecido Teorema de Hartman–Grobman, ver referência [3], garante que em uma vizinhança do ponto de equilíbrio o comportamento das soluções do sistema não linear é similar ao comportamento das soluções do sistema linear, então para se verificar a estabilidade de cada um dos pontos, analisa-se os autovalores da matriz jacobiana, no ponto de equilíbrio e utiliza-se os resultados demonstrados.

4 Aplicação em Epidemiologia

A modelagem matemática em Epidemiologia é realizada através do estudo de equações que descrevem a interação entre a população e o ambiente, resultando numa análise detalhada a respeito da doença, contribuindo para melhorar ações preventivas, como campanhas de vacinação.

O modelo compartimental *SIS* (Suscetível - Infectado - Suscetível) descreve doenças nas quais o indivíduo, ao recuperar-se, não obtém nenhuma imunidade. Seja α a taxa de transmissão da doença e β a taxa de recuperação da doença, vamos admitir como hipótese que a transmissão se dá com o encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados. O modelo é dado pelo sistema abaixo, cujas justificativas estão em [1].

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \end{cases} \quad (1.15)$$

onde $\alpha, \beta > 0$, $S(t) + I(t) = N$, I_0 é a quantidade inicial de indivíduos infectados, então $S_0 = N - I_0$ a quantidade de pessoas sadias.

Fazendo $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$ encontramos dois pontos de equilíbrio: $P_1 = (N, 0)$ e $P_2 = (\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$. A análise de estabilidade desses pontos será

feita através dos resultados apresentados. Encontremos então a matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha I & -\alpha S + \beta \\ \alpha I & \alpha S - \beta \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Caso 1 $P_1 = (N, 0)$: O sistema linear que aproxima o sistema (1.15) na vizinhança do ponto $(N, 0)$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N + \beta \\ 0 & \alpha N - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

cuja matriz de coeficientes é $A = J(N, 0)$. São encontrados os autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \alpha N - \beta$.

Caso 2 $P_2 = (\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$: O sistema linear que aproxima o sistema (1.15) na vizinhança do ponto $(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$ é:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha N + \beta & 0 \\ \alpha N - \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

cuja matriz de coeficientes é $A = J(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$. São encontrados os autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -\alpha N + \beta$.

Em ambos os casos os autovalores estão em função da fração de indivíduos infectados pela doença e β , o coeficiente de recuperação. Analisando os autovalores utilizando o Teorema 9 obtemos que $P_1 = (N, 0)$ é instável e $P_2 = (\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$ é estável.

Agradecimentos: Agradeço ao PET pelo apoio financeiro e minha orientadora professora Marta Cilene Gadotti pelo incentivo, atenção e dedicação na confecção desse trabalho.

Abstract: The most differential equations can not be resolved analytically so it is important consider the equation's qualitative information, without really resolving them. Thus, this work is for the study of linear autonomous systems and some results about ordinary differential equations' qualitative theory.

Keywords: differential equations, qualitative study, model SIR.

Referências Bibliográficas

- [1] Bassanezi, C.R., *Equações Diferenciais com Aplicações*, Editora Harbra, São Paulo, 1988.

- [2] Brauer & Nohel., *The Qualitative Theory Of Ordinary Differential Equations*, Editora W.A. Benjamin, New York, 1969.
- [3] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Editora Springer, New York, 1991.

Sobre Variedades Riemannianas

Lucas de Faccio Nunes e Denner Rychard Bocardi dos Santos

Orientador(a): Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli

Resumo: Pretendemos, nesse trabalho, apresentar um resultado da Geometria Riemanniana, que garante a existência de métricas riemannianas em quaisquer variedades diferenciáveis. Para isso faremos uso de importantes conceitos dessa Geometria que serão brevemente explorados um a um.

Palavras-chave: Geometria Riemanniana; Variedades Riemannianas; Métricas Riemannianas; Produto Tensorial

1 Variedades Diferenciáveis

Para que possamos explorar a Geometria Riemanniana como um todo precisamos inicialmente introduzir o conceito de variedades diferenciáveis. Tal conceito é uma generalização de superfícies regulares, principal elemento de estudo da Geometria Diferencial; para tal vamos definir primeiro o que é um **atlas** de classe C^k :

Definição 1. Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Um **atlas** de dimensão n de classe C^k para M é uma família

$$\Phi = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in A}$$

de aplicações contínuas tais que $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é um homeomorfismo de um aberto $U_\alpha \subset M$ sobre um aberto $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de \mathbb{R}^n para cada $\alpha \in A$, satisfazendo as seguintes condições:

- Os abertos U_α cobrem M , isto é,

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M;$$

- Para todos índices $\alpha, \beta \in A$ tais que $V_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, as aplicações

$$\begin{aligned}\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} &: \varphi_\alpha(V_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(V_{\alpha\beta}), \\ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} &: \varphi_\beta(V_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\alpha(V_{\alpha\beta}),\end{aligned}$$

são diferenciáveis de classe C^k .

Cada aplicação φ_α é chamada um **carta local** de uma vizinhança de um ponto $p \in M$, denotada por $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ com $\alpha \in A$; para fins de convenção vamos omitir o índice α , a menos que haja necessidade. No caso em que $k = \infty$ então dizemos que o atlas é de classe C^∞ .

Considerando o conjunto \mathbf{A} de todos os atlas de classe C^k sobre M , pode-se definir neste conjunto a seguinte relação:

$$\Phi_i \sim \Phi_j \Leftrightarrow \Phi_i \cup \Phi_j \in \mathbf{A}, \quad \forall \Phi_i, \Phi_j \in \mathbf{A}$$

onde \sim define uma relação de equivalência sobre \mathbf{A} .

Definição 2. Uma estrutura diferenciável I de classe C^k de dimensão n sobre M é uma classe de equivalência do atlas de classe C^k de dimensão n sobre M , isto é, $I \in \mathbf{A}$.

Definição 3. Uma variedade diferenciável de classe C^k é um par ordenado (M, I) onde I é uma estrutura diferenciável de classe C^k de dimensão n sobre o conjunto M . Notação: M^n

Essa definição foi tirada de [1], onde se usa de abertos de M mas outras definições podem ser feitas, usando abertos de \mathbb{R}^n como é feita em [4]; ambos os modos são equivalentes.

Para exemplos interessantes de variedades diferenciáveis recomendamos [2] e [3].

De agora em diante, consideraremos sempre variedades diferenciáveis de classe C^∞ . É interessante observar que o modo como é construído as variedades diferenciáveis nos permite poder falar sobre diferenciabilidade, já que podemos levar nosso problema para \mathbb{R}^n , através das cartas locais de M , onde temos uma estrutura de diferenciabilidade.

Com isso em mente vamos agora buscar falar sobre outro elemento da Geometria Diferencial de Superfícies, mas agora no contexto de Variedades Diferenciáveis: o Espaço Tangente. O Espaço Tangente será muito importante para definirmos, depois, o que são Tensores.

2 Espaços Tangente

Definição 4. Seja M uma variedade diferenciável e seja $p \in M$ com (U, φ) uma carta local para o ponto p . A função real $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita diferen-

ciável de classe C^k , $k > 0$ no ponto $p \in M$ se a aplicação

$$f \circ \varphi^{-1} : (\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

for diferenciável de classe C^k no ponto $\varphi(p)$.

Se f for de classe C^∞ no ponto $p \in M$ é dito que f é diferenciável em $p \in M$. Ainda, f é dita diferenciável em toda variedade M se para todo $p \in M$, f for diferenciável em p . Denota-se $F(M) = \{f, f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ é diferenciável em } M\}$ o conjunto de todas as funções diferenciáveis definidas sobre M em \mathbb{R} .

Definição 5. Seja M uma variedade diferenciável. Um vetor tangente a M num ponto $p \in M$ é uma função $X_p : F(M) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g), \quad X_p(fg) = g(p)X_p(f) + f(p)X_p(g)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e para toda $f, g \in F(M)$.

Denotaremos por $T_p(M) = \{X_p : X_p \text{ é um vetor tangente a } M \text{ no ponto } p\}$.

É possível definir em $T_p(M)$ operações de soma e multiplicação por escalares, garantindo assim uma estrutura de espaço vetorial sobre \mathbb{R} para $T_p(M)$; são elas:

$$\begin{aligned} (X_p + Y_p)(f) &:= X_p(f) + Y_p(f), \quad \forall f \in F(M) \\ (\alpha X_p)(f) &:= \alpha X_p(f), \quad \forall f \in F(M), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

para todo $X_p, Y_p \in T_p(M)$. $T_p(M)$ é então chamado de **espaço tangente** a M no ponto p .

Teorema 6. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Seja $p \in M^n$ e $T_p(M)$ o espaço tangente a M no ponto p . Se (U, φ) é um sistema de coordenadas local para o ponto $p \in U$ com $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, então o conjunto*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

constitui uma base para $T_p(M)$.

Prova: Essa prova que aqui é apresentada foi baseada, principalmente, na prova dada em [1], página 83. Observe que:

1. $X_p(\dot{1}) = 0, \forall p \in M$, pois $X_p(\dot{1}) = X_p(\dot{1} \cdot \dot{1}) = 1 \cdot X_p(\dot{1}) + 1 \cdot X_p(\dot{1}) = 2X_p(\dot{1})$, onde $\dot{1}$ é a função constante igual à 1;
2. Se $f \in F(M)$ é tal que $f \equiv c$, c : constante, então $X_p(f) = 0$. De fato, $X_p(f) = X_p(c) = X_p(\dot{1} \cdot c) = c \cdot X_p(\dot{1}) = 0$, onde $\dot{1}$ é a função constante igual à 1.
3. Por hipótese, tem-se que (U, φ) é uma carta local para o ponto p . Considerando assim a função $g : (\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $g(q) = 0$, onde $q = (u^1, \dots, u^n) \in \varphi(U)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} g(tq) dt = g(u^1, \dots, u^n) - g(0). \quad (1.1)$$

Porém, por outro lado,

$$\frac{d}{dt} g(tq) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u^i}(tq) u^i.$$

Assim reescrevendo 1.1:

$$g(u^1, \dots, u^n) = g(0) + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tq) dt \right) u^i = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i(q) u^i. \quad (1.2)$$

Seja $f \in F(M)$, define-se a função $g = f \circ \varphi^{-1}$, ou melhor, $f = g \circ \varphi = g(x^1, \dots, x^n)$.

Utilizando a expressão 1.2, tem-se que

$$g(x^1, \dots, x^n) = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i(x^1, \dots, x^n) x^i. \quad (1.3)$$

Denotando por $f_i = g_i(x^1, \dots, x^n)$, e reescrevendo assim 1.3, tem-se que

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n f_i x^i.$$

É claro que $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = f_i(p), \forall p \in M$. Aplicando a um vetor tangente

$X_p \in T_p(M)$ e utilizando suas propriedades, tem-se que

$$\begin{aligned} X_p(f) &= X_p\left(f(p) + \sum_{i=1}^n f_i x^i\right) \\ &= X_p(f(p)) + \sum_{i=1}^n X_p(f_i) x^i + \sum_{i=1}^n f_i(p) X_p(x^i). \end{aligned}$$

Pelo item 2., obtém se

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^n X_p(x^i) f_i(p) = \sum_{i=1}^n X_p(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Dada a arbitrariedade de f , conclui-se que

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Deste modo foi mostrado que o conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

gera o espaço tangente. Resta mostrar que este conjunto é linearmente independente. De fato, seja

$$\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = 0.$$

Tomando em particular as funções coordenadas x^j , obtém-se para $j = 1, \dots, n$

$$0 = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = a^j. \quad \blacksquare$$

Decorre do Teorema 6 que a dimensão do espaço tangente a uma variedade M é igual a dimensão da variedade, isto é, $\dim T_p(M) = \dim M = n$.

Definição 7. Seja o conjunto $TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ definido pela união de todos os espaços tangentes a variedade M ; um ponto desse conjunto pode ser escrito como (p, X_p) , onde $p \in M$ e $X_p \in T_p(M)$. Então TM munido da projeção $\pi : TM \rightarrow M$, dada por $\pi(p, X_p) = p$ será denominado de fibrado tangente.

É possível mostrar que TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, supondo M^n . Tal demonstração pode ser vista em [2], página 246.

Mencionamos anteriormente que $T_p(M)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , portanto podemos considerar funcionais lineares definidos em $T_p(M)$, isto é, funções $\omega : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a condição

$$\omega(\alpha X_p + \beta Y_p) = \alpha\omega(X_p) + \beta\omega(Y_p), \forall X_p, Y_p \in T_p(M), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Este conjunto será denotado por $T_p^*(M)$ e nada mais é do que o espaço dual de $T_p(M)$. Tal conjunto será de extrema importância para a definição de Tensores no próximo capítulo.

Por argumentos de Álgebra Linear verifica-se que $T_p^*(M)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e que, para a base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

de $T_p(M)$, existe uma única base dual, denotada por

$$\{dx^1 \Big|_p, dx^2 \Big|_p, \dots, dx^n \Big|_p\}$$

de $T_p^*(M)$ tal que, para $i = 1, \dots, n$

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i, \forall j = 1, \dots, n$$

onde δ_j^i é o delta de Kronecker, ou seja, $\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$

3 Tensores

3.1 Vetores Covariantes e Contravariantes

Para que possamos falar sobre Tensores e entender o que são, vamos inicialmente falar sobre o que são vetores covariantes e contravariantes. Tais denominações são dadas à vetores dependendo do modo como é feita sua mudança de coordenadas. Com o intuito de exemplificar cada um dos tipos vamos mostrar como a mudança de coordenadas do *vetor velocidade* e do *gradiente* são diferentes.

Considere o *vetor velocidade* de uma curva em \mathbb{R}^n descrita no sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) por

$$x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

Logo,

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right).$$

A curva, em um outro sistema de coordenadas (y^1, \dots, y^n) , é descrita como:

$$y(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t))$$

e assim

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy^1}{dt}, \dots, \frac{dy^n}{dt} \right).$$

Sabemos que, pela Regra da Cadeia, uma mudança do sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) para (y^1, \dots, y^n) é dado por:

$$\frac{dy^i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dy^i}{dx^j} \frac{dx^j}{dt} \tag{1.4}$$

para $i = 1, \dots, n$.

Vamos considerar agora o *gradiente* de uma função $f : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, usualmente identificado com um vetor. No sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) , o gradiente é definido por

$$\nabla_x f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

enquanto que no sistema de coordenadas (y^1, \dots, y^n) , o gradiente é dado por

$$\nabla_y f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}(x) \right).$$

Novamente temos que o gradiente muda do sistema (x^1, \dots, x^n) para (y^1, \dots, y^n) como segue

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^n \frac{dx^j}{dy^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} \tag{1.5}$$

para $i = 1, \dots, n$.

Comparando as equações 1.4 e 1.5 vemos que o vetor velocidade e o gradiente são diferentes quando comparamos o modo como são feitas suas mudanças de coordenadas. Fazendo um abuso de linguagem, podemos dizer que são inversas, no sentido de que o vetor velocidade muda por um fator $\frac{dy^i}{dx^j}$ enquanto que o gradiente muda por um fator $\frac{dx^i}{dy^j}$.

Usando essa exemplificação vamos definir o que são vetores contravariantes e covariantes. Vetores que se transformam de acordo com a expressão 1.4 são chamados *vetores contravariantes*, enquanto que vetores que se transformam de acordo com a expressão 1.5 são chamados *vetores covariantes* (ou simplesmente *covetores*).

As coordenadas de um vetor contravariante são convencionalmente denotados por índices sobrescritos $v = (v^1, \dots, v^n)$. Enquanto que as coordenadas de um vetor covariante (ou covetor) são denotadas com índices subscritos $v = (v_1, \dots, v_n)$.

3.2 Mudança de Coordenadas no Espaço Tangente $T_p(M)$

Se $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ e $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ são duas parametrizações de vizinhanças de $p = \varphi(x) = \varphi(x^1, \dots, x^n) = \psi(y) = \psi(y^1, \dots, y^n)$ em M , então abusando a notação escrevemos

$$(\psi^{-1} \circ \varphi)(x) = (\psi^{-1} \circ \varphi)(x^1, \dots, x^n) = (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n)),$$

ou seja, denotamos as funções coordenadas $(\psi^{-1} \circ \varphi)(x)$ por $y^j(x)$.

Teorema 8. *Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional e $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$, $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ duas parametrizações de vizinhanças de $p = \varphi(x) = \psi(y)$ em M . Sejam*

$$B_x = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\} \text{ e } B_y = \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \Big|_p \right\}$$

as bases coordenadas de $T_p(M)$ induzidas pelas parametrizações φ e ψ , respectivamente. Denote

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) := \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \varphi)^j}{\partial x^i}(x).$$

Então a matriz de mudança de coordenadas da base B_x para a base B_y é definida por

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p. \quad (1.6)$$

Prova: Por definição e pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &= d\varphi_x(e_i) = d\psi_y(d(\psi^{-1} \circ \varphi)_x(e_i)) = \\ d\psi_y \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \varphi)^j}{\partial x^i}(x) f_j \right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \varphi)^j}{\partial x^i} d\psi_y(f_j) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p. \end{aligned}$$

■

3.3 Espaço Bidual

Definição 9. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. O espaço dual $(V^*)^*$ do espaço dual de V é chamado o *espaço bidual* de V e denotado V^{**} .

O Teorema a seguir propõe uma identificação natural entre V e V^{**} . Tal identificação será importante depois para entendermos Tensores.

Teorema 10. A aplicação $\Phi : V \rightarrow V^{**}$ definida por

$$\Phi(v)(\omega) = \omega(v)$$

é um isomorfismo natural entre V e V^{**} .

Prova: Como $\dim V = \dim V^{**}$, para verificar que Φ é um isomorfismo basta mostrar que ele é injetivo, isto é, que seu núcleo é o subespaço nulo. Seja $e_1 \in V$ um vetor não nulo qualquer. Estenda este vetor a uma base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ para V . Seja $B^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ a correspondente base dual de V^* . Então $\Phi(e_1) \neq 0$ porque

$$\Phi(e_1)(e^1) = e^1(e_1) = \delta_1^1 = 1.$$

Como todo elemento de V é combinação linear dos elementos de B mostramos que $\Phi(v) = \dot{0}$, onde $\dot{0}$ é a função nula, somente se $v = 0$. Portanto o núcleo tem dimensão nula e Φ é isomorfismo, pelo Teorema do Núcleo–Imagem. ■

3.4 Mudança de Coordenadas em $T_p^*(M)$

Falamos anteriormente sobre o espaço dual de $T_p(M)$ e sobre a base desse dual: $\{dx^1 \Big|_p, \dots, dx^n \Big|_p\}$ que será denotada por B^* . Vamos agora ver como é feita a mudança de coordenadas para os elementos de B^* .

Teorema 11. *Nas condições do Teorema 8 e denotando por*

$$B_x^* = \{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\} \text{ e } B_y^* = \{dy^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$$

as respectivas bases duais com respeito as parametrizações φ e ψ . Então a matriz de mudança de coordenadas da base B_x^ para a base B_y^* é definida por*

$$dx^i|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j|_p. \quad (1.7)$$

Prova: A demonstração desse Teorema utiliza-se do Teorema 8 e um resultado de Álgebra Linear sobre mudança de base para vetores de um espaço dual de um espaço vetorial V qualquer (deixamos indicado que tal demonstração pode ser encontrada em [1] página 23, **Proposição 1.8**) ■

Comparando as expressões 1.6 e 1.7 vemos que são diferentes no mesmo sentido que as expressões 1.4 e 1.5 diferem. Portanto podemos dizer que os vetores de $T_p(M)$ são *vetores contravariantes* e os vetores de $T_p^*(M)$ são *vetores covariantes*; e agora serão denotados com índices sobrescritos e subscritos, respectivamente.

Importante dizer que tal diferença não é por acaso, na verdade, tomando um espaço vetorial qualquer V é possível mostrar que os vetores de V são *contravariantes* e os vetores do dual de $V(V^*)$ são *covariantes*. Para uma discussão mais aprofundada recomendamos [1].

3.5 Tensores

O conceito de Tensores é uma ferramenta amplamente utilizada no estudo de Geometrias no geral, principalmente no estudo de curvatura de Variedades de todos os tipos. Faremos uma breve exposição sobre esse assunto. Vamos definir o conceito de tensores utilizando um espaço vetorial V qualquer.

Definição 12. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e V^* seu espaço dual.

- Um **k -tensor covariante** em V (ou *tensor covariante de ordem k*) é uma função k -linear

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R};$$

- Um **l -tensor contravariante** em V (ou *tensor contravariante de ordem l*) é uma função l -linear

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R};$$

- Um **tensor do tipo (k, l)** é um tensor k -covariante e l -contravariante, isto é, uma função real multilinear

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ vezes}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

O espaço vetorial dos k -tensores covariantes sobre V será denotado por $T^k(V)$; o espaço vetorial dos l -tensores contravariantes sobre V será denotado por $T_l(V)$ e o espaço dos (k, l) tensores sobre V será denotado por $T_l^k(V)$.

Exemplos: Um 1-tensor covariante é simplesmente um funcional linear sobre V . Formas bilineares são 2-tensores covariantes. Podemos fazer algumas identificações naturais:

- 0-tensores são números reais: $T^0(V) = \mathbb{R}$;
- 1-tensores covariantes são funcionais lineares em V : $T^1(V) = V^*$;
- 1-tensores contravariantes são vetores de V : $T_1(V) = V^{**} = V$ (a última igualdade vem do Teorema 10).

Quando houver omissão de algum índice significa que tal índice omitido é zero; por exemplo, $T_0^k(V) = T^k(V)$ ou $T_l^0(V) = T_l(V)$.

3.6 Produto Tensorial

Definição 13. Sejam T e S tensores do tipo (k, l) e (p, q) , respectivamente. Seu **produto tensorial** é o tensor $T \otimes S$ do tipo $(k + p, l + q)$ definido por

$$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_{k+p}, \omega^1, \dots, \omega^{l+q}) = T(v_1, \dots, v_k, \omega^1, \dots, \omega^l) S(v_{k+1}, \dots, v_{k+p}, \omega^{l+1}, \dots, \omega^{l+q}).$$

Teorema 14. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base para o espaço vetorial V e $\{e^1, \dots, e^n\}$ é a correspondente base dual para V^* , então

$$B_l^k = \left\{ e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} \right\}_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n}}$$

é uma base para o espaço tensorial $T_l^k(V)$. Além disso, qualquer tensor $T \in T_l^k(V)$ se escreve na forma

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l},$$

onde

$$T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l}).$$

Em particular, $\dim T_l^k = n^{k+l}$.

Prova: Primeiro mostraremos que B_l^k gera o espaço tensorial $T_l^k(V)$. Seja $T \in T_l^k(V)$ um tensor qualquer e defina

$$T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l}).$$

Se $v_1, \dots, v_k \in V, \omega^1, \dots, \omega^l \in V^*$ são vetores arbitrários, expressos em coordenadas por

$$v_r = \sum_{i_r=1}^n v_r^{i_r} e_{i_r} \quad e \quad \omega_s = \sum_{j_s=1}^n \omega_s^{j_s} e^{j_s}$$

para $r = 1, \dots, k$ e $s = 1, \dots, l$, segue da multilinearidade que

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v_k, \omega^1, \dots, \omega^l) &= \\ T \left(\sum_{i_1=1}^n v_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^n v_k^{i_k} e_{i_k}, \sum_{j_1=1}^n \omega_{j_1}^1 e^{j_1}, \dots, \sum_{j_l=1}^n \omega_{j_l}^l e^{j_l} \right) &= \\ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} \omega_{j_1}^1 \dots \omega_{j_l}^l T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l}) &= \\ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} \omega_{j_1}^1 \dots \omega_{j_l}^l &= \\ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1}(v_1) \dots e^{i_k}(v_k) e_{j_1}(\omega^1) \dots e_{j_l}(\omega^l) &= \\ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l}(v_1, \dots, v_k, \omega^1, \dots, \omega^l). \end{aligned}$$

Para mostrar que B_l^k é linearmente independente, suponha que exista uma combinação linear nula

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l} = 0$$

Como

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l} (e_{r_1}, \dots, e_{r_k}, e^{s_1}, \dots, e^{s_l}) = e^{i_1}(e_{r_1}) \dots e^{i_k}(e_{r_k}) e_{j_1}(e^{s_1}) \dots e_{j_l}(e^{s_l}) = \delta_{r_1}^{i_1} \dots \delta_{r_k}^{i_k} \delta_{j_1}^{s_1} \dots \delta_{j_l}^{s_l},$$

segue que

$$0 = T(e_{r_1}, \dots, e_{r_k}, e^{s_1}, \dots, e^{s_l}) = T_{r_1 \dots r_k}^{s_1 \dots s_l}$$

para todos os índices $r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_l = 1, \dots, n$. ■

Vamos voltar, agora, nossa atenção para o espaço tensorial no caso que $V = T_p(M)$ que é nosso principal interesse.

Definição 15. Seja M uma variedade diferenciável. Para cada $p \in M$ definimos o **espaço tensorial tangente** $T_l^k(T_p M)$ a M em p . Seja $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ uma parametrização de uma vizinhança de um ponto $p \in M$. A base coordenada

$$B_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

do espaço tangente $T_p M$ associada à parametrização φ e sua respectiva base dual

$$B_p^* = \{ dx^1 \Big|_p, \dots, dx^n \Big|_p \}$$

dão origem à **base coordenada** associada à parametrização φ para o espaço tensorial tangente $T_l^k(T_p M)$

$$(B_l^k)_p = \left\{ dx^{i_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \Big|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \Big|_p \right\}_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n}}$$

3.7 Fibrados e Campos Tensoriais

Definição 16. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n com um atlas $\varphi = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in A}$. O **fibrado (k, l) -tensorial** de M é a variedade diferenciável de dimensão $n + n^{k+l}$

$$T_l^k M = \{(p, T) : p \in M \text{ e } T \in T_l^k(T_p M)\}$$

com um atlas

$$\Psi = \left\{ \psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^{k+l}} \rightarrow T_l^k M \right\}_{\alpha \in A}$$

definido por

$$\psi_\alpha \left(x, (T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l})_{\substack{i_1, \dots, i_k=1, \dots, n \\ j_1, \dots, j_l=1, \dots, n}} \right) = \left(\varphi_\alpha(x), \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \Big|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \Big|_p \right)$$

Algumas identificações naturais:

- $T_1 M = TM$;
- $T^1 M = T^* M$.

Definição 17. Um **campo tensorial** é uma seção do fibrado tensorial $T_l^k M$, isto é, o campo tensorial é uma aplicação $s : M \rightarrow T_l^k M$ tal que $\pi \circ s = Id|_M$. Um **campo tensorial diferenciável** é uma seção diferenciável do fibrado tensorial. **Notação:** $\tau_l^k M$.

4 Métricas Riemannianas

Estamos agora em posse de tudo que precisamos para definir o que é uma métrica riemanniana e apresentar o resultado principal desse trabalho.

Definição 18. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Uma **métrica riemanniana** em M é um campo 2-tensorial covariante diferenciável g com as seguintes propriedades:

- g é simétrico, isto é, $g_p(v, w) = g_p(w, v)$ para todo $v, w \in T_p M$;
- g é positivo definido, isto é, $g_p(v, w) \geq 0$ para todo $v \in T_p M$.

Uma variedade diferenciável M com uma métrica riemanniana g dada é chamada uma **variedade riemanniana**.

Cabe aqui uma explicação mais detalhada sobre o que é uma métrica riemanniana. Temos que g é um campo 2-tensorial covariante diferenciável,

ou seja, g é uma aplicação diferenciável definida em M com valores em T^2M , tal que $\pi \circ g = Id|_M$;

$$g : M \rightarrow T^2M.$$

Ainda, T^2M é o fibrado tensorial:

$$T^2M = \{(p, T) : p \in M \text{ e } T \in T^2(T_pM)\},$$

onde $T^2(T_pM)$ é o espaço tensorial tangente e é o conjunto formado por aplicações bilineares como segue:

$$T : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}.$$

De modo que uma métrica riemanniana em M nada mais é do que uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM que varia diferenciavelmente com p no sentido de que se $\varphi : U \rightarrow V$ é uma parametrização de uma vizinhança V em M e $B_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ é a base coordenada de T_pM associada a esta parametrização, para cada $p \in V$, então as funções $g_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_p$$

são diferenciáveis. De fato, escrevendo o tensor métrica em coordenadas tendo em mente a **Definição 15**, temos

$$g_p = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) dx^i \Big|_p \otimes dx^j \Big|_p,$$

e as funções componentes g_{ij} do tensor métrica g são diferenciáveis para toda parametrização φ se, e somente se, g é diferenciável.

Vamos ver agora o resultado principal desse trabalho; ele garante a existência de pelo menos uma métrica riemanniana em uma variedade diferenciável qualquer, isso é muito interessante, pois de modo mais correto, uma variedade riemanniana é um par (M, g) , onde M é uma variedade diferenciável e g a métrica riemanniana, já que uma mesma variedade diferenciável pode admitir diferentes métricas riemannianas.

Teorema 19. *Toda variedade diferenciável possui uma métrica riemanniana.*

Prova: Seja $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_\alpha$ um atlas para M e $\{f_\alpha\}_\alpha$ uma partição da unidade de M subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}_\alpha$.

Em cada V_α podemos definir uma métrica riemanniana, aquela induzida pela parametrização: dado $p \in M$ e vetores $v, w \in T_p M$, eles se escrevem em coordenadas com relação à base $B_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ associada à parametrização φ_α por

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \text{ e } w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

e definimos o produto interno

$$\langle v, w \rangle_p^\alpha = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Esta é uma métrica riemanniana na subvariedade V_α , pois $g_{ij}^\alpha = \delta_{ij}$. Para definir uma métrica riemanniana global em M , usamos a partição da unidade,

$$\langle v, w \rangle_p = \sum_{i=1}^n f_\alpha(p) \langle v, w \rangle_p^\alpha. \quad \blacksquare$$

Agradecimentos: Agradecemos à Elfris pela atenção e dedicação e por acreditar em nosso projeto. Agradecemos também à Eru Ilúvitar por seus pensamentos.

Abstract: We intend in this paper to present an important result of the Riemannian Geometry, which guarantees the existence of Riemannian metrics in any differentiable manifold. For those we will use of important concepts from this Geometry that will be shortly presented and explored.

Keywords: Riemannian Geometry; Riemannian Manifolds; Riemannian Metrics; Tensorial Product

Referências Bibliográficas

- [1] Delbem, N.F., *Introdução aos Modelos Cosmológicos*, Dissertação (Mestrado) – UNESP - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2010.
- [2] McCleary, J., *Geometry from a Differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press, 1994.

- [3] Lima, E.L., *Variedades Diferenciáveis*, IMPA, 2007.
- [4] Biezuner, R.J., *Notas de Aula - Geometria Riemanianna*, 2015. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/geometria_riemanniana.pdf.

Uma Aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Maria Letícia Salvador¹

Orientador(a): Profa. Dra. Suzete Maria da Silva Afonso

Resumo: Neste trabalho, apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que garante a existência de, pelo menos, um ponto fixo para funções contínuas definidas na bola unitária fechada do espaço euclidiano n -dimensional e, através dele, demonstraremos o Teorema de Lefschetz que trata de existência de solução periódica para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Palavras-chave: Ponto Fixo; Teorema do Ponto Fixo de Brouwer; Teorema de Lefschetz.

1 Preliminares

A princípio, listaremos conceitos e resultados de caráter preliminar para a apresentação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e de sua aplicação.

Definição 1. Define-se ponto fixo de uma função como sendo um ponto do domínio desta função que não se altera pela sua aplicação, isto é, $x \in A$ é dito ponto fixo de uma função $f : A \rightarrow A$ se $f(x) = x$.

Denotaremos por B a bola unitária fechada em \mathbb{R}^n , definida por:

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$$

e sua fronteira é definida por:

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}.$$

Lembremos que, em \mathbb{R}^n , a norma usual é a norma euclidiana, dada por:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

¹Bolsista PET

Lema 2. *Seja $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e seja f uma função definida em $[t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a valores em \mathbb{R} , contínua e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe uma constante real positiva L tal que*

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|,$$

para $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$, e $z_1, z_2 \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Então, existe a^* com $0 < a^* \leq a$ tal que a equação diferencial ordinária

$$y' = f(t, y) \tag{1.1}$$

tem uma única solução u definida em $[t_0 - a^*, t_0 + a^*]$ que satisfaz $u(t_0) = y_0$.

Lema 3. *Seja $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - (b + c), y_0 + (b + c)] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, lipschitziana na segunda variável, com $\|f\|_\infty \leq M$, $b = Ma$ e $c > 0$. Seja u a solução de*

$$y' = f(t, y)$$

que satisfaz $u(t_0) = y_0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\tilde{f} : [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - (b + c), y_0 + (b + c)] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, lipschitziana na segunda variável e satisfaz $\|\tilde{f}\|_\infty \leq M$ e $\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \delta$, então, para $\tilde{y}_0 \in [y_0 - (b + c), y_0 + (b + c)]$, a solução $\tilde{u} : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ de

$$y'(t) = \tilde{f}(t, y),$$

com $\tilde{u}(t_0) = \tilde{y}_0$, satisfaz $\|\tilde{u} - u\|_\infty \leq \varepsilon$ e $\|\tilde{u}' - u'\|_\infty \leq \varepsilon$.

Lembramos que $\|\cdot\|_\infty$ denota a norma da convergência uniforme:

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{x \in A} |\psi(x)|,$$

onde ψ é uma função real contínua definida num compacto A .

2 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e uma Aplicação

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é um resultado sobre existência de pontos fixos. Sob certas condições, ele assegura a existência de uma raiz para a equação $f(x) - x = 0$.

Uma das mais simples aplicações é a versão unidimensional deste teorema.

Teorema 1 (Existência de ponto fixo na reta (caso $n = 1$)). *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua. Então, existe pelo menos um ponto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.*

Prova: Defina $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ por $\varphi(x) = x - f(x)$, para $x \in [a, b]$. Claramente, φ é contínua, uma vez que f e função identidade $x \in [a, b] \mapsto x \in [a, b]$ são contínuas. Mostrar que f possui um ponto fixo equivale a mostrar que φ possui raiz.

Note que a imagem de f está contida intervalo $[a, b]$, portanto $a \leq f(a) \leq b$ e $a \leq f(b) \leq b$, de onde segue que $\varphi(a) \leq 0 \leq \varphi(b)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que $\varphi(c) = 0$, ou seja, $f(c) = c$. ■

A proposta deste trabalho é apresentar uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer à teoria de equações diferenciais ordinárias. A demonstração de tal teorema para o caso n -dimensional é complexa e exige muitos pré-requisitos para o público alvo do trabalho. Por este motivo, vamos omití-la aqui, mas informamos que a mesma pode ser consultada em [1] pelo leitor. O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer será enunciado a seguir.

Teorema 2 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). *Seja B a bola unitária fechada no espaço euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n , com $n > 1$. Então, qualquer função contínua $f : B \rightarrow B$ possui ao menos um ponto fixo.*

Veja que o teorema se restringe a funções definidas na bola unitária fechada B em \mathbb{R}^n que tomam valores na mesma. Porém, é possível generalizar este resultado para funções contínuas $f : B_R(0) \rightarrow B_R(0)$, onde $B_R(0)$ é a bola fechada de centro zero e raio $R > 0$ em \mathbb{R}^n ($B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq R\}$), conforme segue abaixo.

Corolário 4. *Seja $B_R(0)$ a bola fechada de centro 0 e raio R em \mathbb{R}^n , $n > 1$. Se $\phi : B_R(0) \rightarrow B_R(0)$ for contínua, então ϕ admite ao menos um ponto fixo.*

Prova: Considere B a bola unitária fechada centrada na origem em \mathbb{R}^n , $n > 1$. Defina $\gamma : B \rightarrow B$ por:

$$\gamma(x) = \frac{1}{R}\phi(Rx), \text{ para } x \in B.$$

Observe que γ é contínua e, além disso,

$$\|\gamma(x)\| = \left\| \frac{1}{R}\phi(Rx) \right\| = \frac{1}{R} \|\phi(Rx)\| \leq \frac{R}{R} = 1.$$

Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, existe $x_0 \in B$ tal que

$$\gamma(x_0) = x_0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{R}\phi(Rx_0) = x_0,$$

de onde segue que

$$\phi(Rx_0) = Rx_0,$$

que completa a prova. ■

A aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer à teoria de equações diferenciais ordinárias que exibiremos é o Teorema de Lefschetz, que trata de existência de solução periódica para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Teorema 3 (Teorema de Lefschetz). *Sejam p , f e g funções reais contínuas e com derivada primeira contínua, definidas na reta e tais que:*

- I - *A função p é periódica e de período T ;*
- II - *$\frac{f(x)}{x}$ tende para $+\infty$ com $|x|$;*
- III - *Existem constantes positivas b e B tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$|g(x) - bf(x)| \leq B|x|.$$

Então, a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g'(x)\frac{dx}{dt} + f(x) = p(t) \tag{1.2}$$

tem uma solução periódica $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ de período T .

Note que, tomando $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ e $G(x) = \frac{g(x)}{x}$ a condição II equivale a:

- II' - *$F(x)$ tende para $+\infty$ com $|x|$.*

De III seque, então, que o mesmo vale para G . A condição III pode ser substituída pela condição:

III' - Existem constantes b e B tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$|G(x) - bF(x)| \leq B.$$

É fácil verificar que a equação (1.6) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + g(x) = y, \\ \frac{dy}{dt} + f(x) = p(t). \end{cases} \quad (1.3)$$

Vamos mostrar que esse sistema tem uma solução

$$\Gamma : t \in \mathbb{R} \longrightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

periódica e de período T .

Prova: Do Lema 2 segue que, dado $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$, existe uma única solução de (1.7) passando pelo ponto (t_0, x_0, y_0) . Seja (t'_0, t''_0) o intervalo no qual esta solução está definida e a indiquemos por Γ_{t_0, x_0, y_0} .

Não é difícil verificar que a solução Γ_{t_0, x_0, y_0} está definida em $[t_0, +\infty)$, isto é, $t''_0 = +\infty$.

Vamos mostrar que existe uma região plana limitada por uma elipse

$$ax^2 - 2xy + by^2 = \rho$$

tal que, para qualquer ponto (x_1, y_1) da elipse e para qualquer $t_1 \in \mathbb{R}$, a solução Γ_{t_1, x_1, y_1} se dirige para dentro da elipse (quando t cresce).

Tomemos $a > 0$ com $ab > 1$. Então, a forma quadrática

$$2u(x, y) = ax^2 - 2xy + by^2 \quad (1.4)$$

é definida positiva. Para x, y funções reais de uma variável real de classe C^1 , temos

$$u' = \frac{du}{dt} = ax \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}y - x \frac{dy}{dt} + by \frac{dy}{dt}. \quad (1.5)$$

Se $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon) \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ é uma solução do sistema (1.7), temos

$$u' = \frac{du}{dt} = ax(y - g(x)) - (y - g(x))y - x(p(t) - f(x)) + by(p(t) - f(x))$$

ou

$$u' = \frac{du}{dt} = axy - ax^2G - y^2 + xyG - xp + x^2F + byp - bxyF,$$

de onde segue que

$$u' = \frac{du}{dt} = (ax - y)(y - xG) + (by - x)(p - xF). \quad (1.6)$$

Tomemos coordenadas polares r e θ no plano. Como temos

$$\inf\{x^2 + y^2; u(x, y) = \rho\} \rightarrow +\infty \text{ quando } \rho \rightarrow +\infty,$$

então o resultado seguirá se demonstrarmos que existe $r_0 > 0$ tal que, para $r \geq r_0$, temos $u' < 0$.

Com efeito, substituindo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ em (1.6), segue que

$$\begin{aligned} \frac{u'}{r^2} &= (-aG + F) \cos^2 \theta + [a + (G - bF)] \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \\ &\quad + \frac{p}{r}(b \sin \theta - \cos \theta), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$|G - bF| \leq B \Rightarrow |aG - abF| \leq aB \Rightarrow aG - abF \geq -aB. \quad (1.8)$$

Para $|x| \geq r_0$, temos $F > 0$ e, portanto, $abF > F$, pois $ab > 1$. Daí, $aG - F > aG - abF \geq -aB$.

Para $|x| \leq r_0$, $aG - F$ sendo uma função contínua é limitada e existe, portanto, uma constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$aG - F > -C. \quad (1.9)$$

De (1.7), (1.8), (1.9) segue que

$$\frac{u'}{r^2} < C \cos^2 \theta + (a + B)|\cos \theta| |\sin \theta| - \sin^2 \theta + \frac{p}{r}(b \sin \theta - \cos \theta).$$

1 - Tomemos $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ e θ tal que

$$\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \leq \alpha \text{ ou } \left| \theta - \frac{3\pi}{2} \right| \leq \alpha.$$

$E(\theta) = C \cos^2 \theta + (a + B)|\cos \theta| |\sin \theta| - \sin^2 \theta$ é uma função contínua de θ com valor -1 se $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e, portanto, para $|\cos \theta|$ suficientemente

pequeno, isto é, para α suficientemente pequeno, $E(\theta)$ estará arbitrariamente próximo de -1 .

A função p , sendo contínua e periódica, é limitada, e podemos então encontrar r_1 tal que, para $r \geq r_1$, $|\left(\frac{p}{r}\right)(b \operatorname{sen} \theta - \cos \theta)|$ seja arbitrariamente pequeno.

Podemos, pois, encontrar α_0 e r_1 tal que, para $r \geq r_1$ e $|\theta - \frac{\pi}{2}| \leq \alpha_0$ ou $|\theta - \frac{3\pi}{2}| \leq \alpha_0$, tenhamos $u' < 0$.

2 - Para todo ponto (x, y) tal que $|\theta - \frac{\pi}{2}| \geq \alpha_0$ e $|\theta - \frac{3\pi}{2}|_0 \geq \alpha_0$, a função

$$\varepsilon = \varepsilon(r, \theta) = \frac{p(b \operatorname{sen} \theta - \cos \theta)}{r \cos^2 \theta}$$

é limitada (se $r \geq r_0 > 0$), e temos

$$\frac{u'}{r^2} = -(aG - F - \varepsilon) \cos^2 \theta + (a + G - bF) \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^2 \theta,$$

que, considerado como forma quadrática em $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$, tem discriminante $\Delta = (a + G - bF)^2 - 4(aG - F - \varepsilon)$. Como $|G - bF| \leq B$, segue que $(a + G - bF)^2 \leq c_1$, onde c_1 é uma constante conveniente. Como ε é limitada, segue que $aG - F - \varepsilon > (ab - 1)F + c_2$, onde c_2 é uma constante conveniente, de onde vem que $\Delta < -4(ab - 1)F + c_3$. Como $ab > 1$ e F tende para $+\infty$ com $|x|$, então o segundo membro da última desigualdade tende para $-\infty$ quando r cresce e, portanto, existe r_1 tal que, para $r \geq r_1$, tem-se $\Delta < 0$. Por conseguinte, a forma quadrática $\frac{u'}{r^2}$ acima é definida negativa, isto é, $u' < 0$ para $r \geq r_1$ e θ tal que $|\theta - \frac{\pi}{2}| \geq \alpha_0$ e $|\theta - \frac{3\pi}{2}| \geq \alpha_0$.

3 - Tomando então $r \geq \max\{r_0, r_1\}$ e θ qualquer, temos $u' > 0$.

Escrevemos agora $\Gamma_{x_0, y_0} = \Gamma_{0, x_0, y_0}$. Podemos considerar a aplicação

$$\psi : (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \Gamma_{x_0, y_0}(T) = (x(T), y(T)) \in \mathbb{R}^2.$$

Pelo Lema 3, essa aplicação é contínua e, pelo que foi visto anteriormente, ela leva a região

$$\{(x, y); u(x, y) \leq \rho\}$$

do plano em si mesma quando ρ é suficientemente grande. Do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer segue que ψ tem um ponto fixo (x_0, y_0) (com

$u(x_0, y_0) \leq \rho$ e, portanto, $\Gamma_{x_0, y_0}(T) = (x_0, y_0)$. Da unicidade da solução de (1.7) e do fato de que a função p tem período T , segue que

$$\Gamma_{x_0, y_0}(t + T) = \Gamma_{x_0, y_0}(t), t \geq 0.$$

Como podemos considerar Γ_{-T, x_0, y_0} , segue que essa solução está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, e é considerada de período de T . ■

3 Considerações Finais

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é um resultado de grande relevância a respeito da existência de ponto fixo, muito útil para a compreensão da topologia dos espaços euclidianos. É também o ponto de partida para a demonstração de outros teoremas de ponto fixo, como o teorema do ponto fixo de Schauder e o teorema do ponto fixo de Schaefer. Neste trabalho, através do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, conseguimos garantir a existência de solução periódica para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Agradecimentos: Agradeço ao PET pelo apoio financeiro, aos meus pais, por me apoiarem, a Profa. Dra. Suzete Maria da Silva Afonso por me orientar e me aconselhar sempre e a Deus por me abençoar.

Abstract: In this work we will present the Brouwer Fixed Point Theorem, which guarantees the existence of at least one fixed point to continuous functions defined on the closed unit ball in the n -dimensional Euclidean space and, through it, we will demonstrate the Lefschetz Theorem which deals with existence of periodic solution to an ordinary differential equation of second order.

Keywords: Fixed Point; Brouwer Fixed Point Theorem; Lefschetz Theorem.

Referências Bibliográficas

- [1] Hoing, Chain Samuel, *Aplicações da Topologia à Análise*, Textos Universitários do IME-USP, São Paulo, 2011.

A Matemática por trás da desvalorização do dinheiro

Mariane Rodrigues Regonha¹

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Nesse trabalho iremos comparar valores monetários em distintos períodos, considerando os reflexos causados pela inflação em cada um desses valores, levando em conta, por exemplo, o poder aquisitivo da moeda.

Palavras-chave: Matemática Financeira; Inflação; Valores Monetários.

1 Introdução

Esse trabalho é baseado em um estudo sobre Matemática Financeira e apresentará algumas aplicações a partir de conceitos tais como juros compostos, índices de preços, inflação e valores monetários.

Aqui desejamos exibir, por meio de exemplos, como a inflação é capaz de desvalorizar a moeda e diminuir seu poder de compra com o passar do tempo.

Dessa maneira podemos perceber a importância da Matemática na Matemática Financeira como ferramenta para tomada de decisões em investimentos, financiamentos e arrecadações.

2 Situação-Problema

O problema que norteará o desenvolvimento desse trabalho consiste nas informações e questionamentos a seguir:

Sabendo-se que um aluno de graduação passou a receber, a partir de janeiro de 2013 uma bolsa mensal no valor de R\$400,00 e permaneceu recebendo tal quantia até março de 2015, desejamos saber - considerando os efeitos inflacionários e os índices de preços nesse período - qual seria o poder de compra do valor de sua bolsa no início de segundo trimestre de 2015 e, conseqüentemente, calcular qual o reajuste ideal a ser aplicado na quantia mensal que seria recebida para que o aluno pudesse adquirir as mesmas coisas que adquiria com R\$400,00 no primeiro trimestre de 2013.

¹Programa de Educação Tutorial-PET

3 Conceitos Prévios

3.1 Juros

De acordo com [1], receber uma quantia hoje é diferente de que recebê-la no futuro, pois uma unidade monetária hoje é preferível à mesma disponível amanhã, visto que com o passar do tempo sofrerá dos efeitos inflacionários. Postergar um recebimento por um certo tempo envolve certo sacrifício, o qual deve ser recompensado com o pagamento de uma quantia extra – chamada de *juros*.

Assim, são os juros que induzem o adiamento do consumo, formando então poupanças e investimentos na economia.

Existem dois tipos de regime de capitalização (juros): simples e composto, que estão definidos e sua utilização exemplificada a seguir.

Definição 1. O regime de capitalização simples se comporta como uma progressão aritmética, pois cresce de forma linear com o passar do tempo. O valor dos juros é calculado pela expressão:

$$J = C \times i \times n, \quad (1.1)$$

em que J é valor dos juros expresso em unidades monetárias; C o capital (valor em dinheiro em determinado momento); i a taxa de juros (em forma unitária) e n o prazo.

Exemplo 2. Em um empréstimo de \$1000,00 com duração de 5 anos e juros de 10% a.a. (ao ano) temos:

Início Ano 1		\$000,00	\$1000,00
Fim Ano 1	$0,10 \times 1000,00 =$	\$100,00	\$1100,00
Fim Ano 2	$0,10 \times 1000,00 =$	\$100,00	\$1200,00
Fim Ano 3	$0,10 \times 1000,00 =$	\$100,00	\$1300,00
Fim Ano 4	$0,10 \times 1000,00 =$	\$100,00	\$1400,00
Fim Ano 5	$0,10 \times 1000,00 =$	\$100,00	\$1500,00

Note que

- os juros não tem seu valor alterado, pois são calculados sobre o valor inicial;
- ainda seria possível calcular da seguinte maneira: 5 anos \times 10% ao ano = 50% em 5 anos e, se fosse o caso de calcular mensalmente, bastaria dividir a taxa anual por 12 meses: $\frac{10\% \text{ a.a.}}{12 \text{ meses}} = 0,8333\% \text{ a.m.,}$

em que $a.m.$ indica que a taxa é calculada mensalmente, ou seja, ao $mês$.

Definição 3. O regime de capitalização composta é como uma progressão geométrica, cresce de forma não linear, os juros referentes a um momento n incidem sobre o capital inicial e os juros do momento $n - 1$.

$$FV = PV(1 + i)^n \text{ e } PV = \frac{FV}{(1 + i)^n},$$

em que PV é valor presente – no caso, o capital inicial – e FV o valor futuro—o capital depois da incidência dos juros—, $(1 + i)^n$ é o fator de capitalização a juros compostos e $\frac{1}{(1 + i)^n}$ o fator de atualização a juros compostos.

Sabemos ainda que o valor dos juros (J) é dado por $J = FV - PV$. Como $FV = PV(1 + i)^n$ temos

$$J = PV((1 + i)^n - 1). \quad (1.2)$$

Exemplo 4. Em um empréstimo de \$1000,00 com duração de 5 anos e juros de 10% ao ano temos;

Início Ano 1		\$000,00	\$1000,00
Fim Ano 1	$0,10 \times 1000,00 =$	\$100,00	\$1100,00
Fim Ano 2	$0,10 \times 1100,00 =$	\$110,00	\$1210,00
Fim Ano 3	$0,10 \times 1210,00 =$	\$121,00	\$1331,00
Fim Ano 4	$0,10 \times 1331,00 =$	\$133,10	\$1464,10
Fim Ano 5	$0,10 \times 1464,10 =$	\$146,41	\$1610,51

Observe que

- os juros tem seu valor alterado, pois são calculados sobre o valor inicial e os juros de períodos anteriores;
- o crescimento dos juros evolui exponencialmente com o tempo. Neste caso calcula-se juros sobre juros.

O uso de juros simples restringe-se principalmente às operações praticadas a curto prazo.

Muitas taxas praticadas no mercado financeiro estão referenciadas em juros simples, porém a formação dos montantes das operações processa-se exponencialmente (juros compostos). Um exemplo disso é a Caderneta de

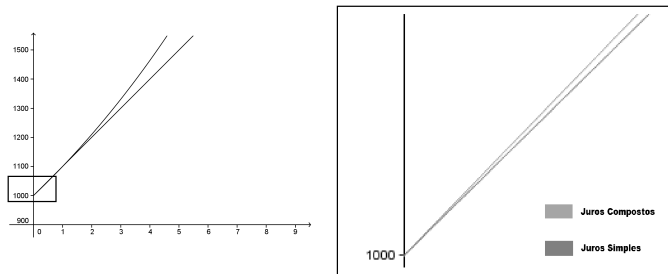


Figura 1.1: Comportamento dos regimes de capitalização simples e composto

Poupança, que paga uma taxa de juros de aproximadamente 6% a.a. (taxa linear), creditando mensalmente 0,5% segundo critérios dos juros compostos (ao longo dos meses tem-se juros sobre juros). Outras situações em que se utilizam juros compostos são o estudo do crescimento demográfico e comportamento dos índices de preços da economia, por exemplo.

Observação 5. Os juros devem remunerar o risco das operações, a perda do poder de compra do capital – de acordo com a inflação (fenômeno que corrói o capital, diminuindo seu poder de compra) – e gerar lucro, ou seja, o valor final deve superar o capital inicialmente aplicado.

Observação 6. Em operações de curto prazo é comum ter o mesmo definido em número de dias, que pode ser calculado de duas maneiras:

- a) *tempo exato*: utiliza-se o calendário civil (365 dias). O juro calculado dessa maneira chama-se *juro exato*;
- b) *ano comercial*: admite-se que cada mês tem 30 dias e o ano 360 dias. O juro calculado dessa forma é chamado *juro comercial* ou *ordinário*.

Por exemplo, 12% ao ano equivale à taxa diária de:

- a) *Juro Exato*:

$$\frac{12\%}{365} = 0,032877\%.$$

- b) *Juro Comercial*:

$$\frac{12\%}{360} = 0,033333\%.$$

Note que o Juro Comercial diário é pouco superior ao exato.

3.2 Inflação e Índices de Preços

Definição 7. O processo inflacionário ou *inflação* de uma economia pode ser entendido pela elevação generalizada dos preços dos vários bens e serviços. Do mesmo modo, uma baixa dos preços de mercado dos bens e serviços é um fenômeno denominado *deflação*.

Definição 8. *Índices de preços* são números que agregam e representam os preços de determinados produtos. Sua variação mede a variação média dos preços desses produtos. Podem se referir, por exemplo, a preços ao consumidor, ao produtor, custos de produção ou preços de exportação e importação.

Os índices de preços resultam de um procedimento estatístico que possibilita medir as variações ocorridas nos níveis gerais de preços de um período para o outro.

3.3 Exemplos de índices de preços

IGP-M: índice geral de preços do mercado, registra a inflação de preços desde matérias-primas agrícolas e industriais até bens e serviços finais. É calculado mensalmente pela Fundação Getúlio Vargas (FGV).

IPCA: Índice de Preços ao Consumidor Amplo, medido mensalmente pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para oferecer a variação dos preços no comércio ao público final. É considerado o índice oficial de inflação do país.

A inflação está diretamente ligada às variações dos índices de preços e, para visualizar isso, usaremos o exemplo a seguir:

Exemplo 9. Considere a evolução simbólica abaixo segundo [2], do índice geral de preços do mercado (*IGP-M*) entre os meses de maio a dezembro de determinado ano:

A taxa de inflação do segundo semestre, medida pelo *IGP-M*, é reflexo da evolução do índice entre os meses de junho e dezembro. Dessa forma, a inflação desse período é dada por:

$$\frac{1.343,29}{1.327,39} - 1 = 0,011978 = 1,1978\%.$$

Portanto, os preços nesse período cresceram aproximadamente 1,2%.

MÊS	IGP-M
Maio	1.337,29
Junho	1.327,39
Julho	1.319,30
Agosto	1.315,73
Setembro	1.318,37
Outubro	1.322,06
Novembro	1.335,01
Dezembro	1.343,29

Dessa maneira, a taxa inflacionária pode ser medida a partir de índices de preços, pela expressão:

$$I = \frac{P_n}{P_{n-t}} - 1, \quad (1.3)$$

onde I é taxa de inflação obtida a partir de determinado índice de preços; P o índice de preços utilizado para o cálculo da taxa de inflação; n a data de determinação da taxa de inflação e $n - t$ o período anterior considerado.

Exercício 10. Um investidor aplicou R\$100 mil e obteve, ao final de um ano, rendimentos de juros de R\$12 mil. Suponha que no período da aplicação, a inflação da economia atingiu 5,6% e desenvolva uma análise do resultado obtido pelo investidor.

- o investidor apurou os seguintes resultados:

Rendimento nominal	R\$12.000,00
Inflação no período	R\$5.600,00
Ganho do investidor acima da inflação	R\$6.400,00

- valor da aplicação corrigido para o final do ano:

$$\text{Capital corrigido} \quad \text{R}\$100.000,00 \times 1,056 = \text{R}\$105.600,00$$

a taxa de *retorno nominal* do investidor é medida pela relação entre o ganho nominal e o valor histórico do capital investido, ou seja,

$$\frac{12.000,00}{100.000,00} = 12\%,$$

o *ganho real* é obtido após depurar-se os efeitos inflacionários do investimento, sendo calculado pela relação entre o rendimento real e o capital investido corrigido pela inflação:

$$\frac{6.400,00}{105.600,00} = 6,06\%.$$

3.4 Valores monetários

Ao comparar valores monetários de distintos períodos em condições de inflação, encontramos um problema visto que tais valores tem diferentes níveis de poder aquisitivo da moeda.

Para exemplificar esse fato, suponhamos que uma pessoa tenha adquirido um imóvel por R\$60 mil em certa data, e o vendido dois anos depois, por R\$80 mil. Sabendo-se que neste período a inflação atingiu 40%, qualquer avaliação superficial que leve em conta apenas o resultado auferido nesse negócio (lucro de R\$20 mil) será precipitada, principalmente ao se considerar que os preços tiveram uma elevação média de 40%. Assim, o ganho terá sido nominal, determinado pela diferença nos preços e não por uma valorização real do imóvel que supere a inflação.

Observe que para não haver prejuízo, o imóvel deveria ter sido vendido por um preço 40% maior em comparação com o seu valor de compra há dois anos, o que significa R\$84 mil (R\$60 mil \times 1,4). Portanto, somente a partir de R\$84 mil reais é que realmente haveria lucro na transação. Dessa forma, a venda do imóvel por \$80 mil indica um prejuízo de \$4 mil.

Assim, é preciso distinguir o ganho nominal equivalente a R\$20 mil (ou 33,33% de rentabilidade) da venda do imóvel, daquele que é o resultado real calculado de acordo com a inflação.

Os ajustes para se conhecer a evolução real de valores monetários em inflação são processados por meio de *indexações* (inflacionamento) e *desindexações* (deflacionamento) dos valores nominais, processados a partir dos índices de preços.

A indexação é baseada na correção dos valores nominais de uma data em moeda representativa de mesmo poder de compra em um momento posterior, enquanto a desindexação envolve transformações de valores nominais em moeda representativa de mesmo poder de compra em um momento anterior.

No exemplo acima, observamos um ganho nominal de 33,33%, ou seja, o imóvel foi vendido por 1,3333 vezes o seu valor de compra, mas essa relação compara valores de diferentes datas com capacidade de compra

desiguais. Para conhecer o resultado real da operação, é preciso expressar os valores monetários em moeda representativa de poder de compra de um mesmo instante.

Ao indexar os valores para a data da venda, com inflação de 40% no período, tem-se uma relação entre o preço de venda na data da venda e o preço de compra corrigido para a data da venda:

$$\frac{80.000,00}{60.000,00 \times 1,40} - 1 = -4,76\%,$$

o que representa uma evolução real negativa de 4,76%.

Note que essa taxa real de -4,76% é obtida pelo regime de juros compostos e não pelo critério linear. Fato esse condizente com o comportamento exponencial da formação da taxa inflacionária. Portanto, é incorreto subtrair da taxa nominal encontrada de 33,33% o percentual específico da inflação de 40%.

Por outro lado, ao desindexar os valores, colocando-os em moeda da data de compra do imóvel obtemos, a partir da relação entre o preço de venda deflacionado para a data da compra e o preço de compra na data da compra,

$$\frac{\frac{80.000,00}{1,40}}{60.000,00} - 1 = -4,76\%.$$

Tanto pelo processo de inflacionamento quanto pelo de deflacionamento, apura-se para o negócio um prejuízo real de 4,76%.

Comportamento exponencial da taxa de inflação

A inflação tem comportamento exponencial, com aumento de preço sobre um valor que já incorpora acréscimos apurados em períodos anteriores, assemelhando-se ao regime de juros compostos. Por exemplo, sendo de 2,8%, 1,4% e 3,0%, respectivamente, as taxas de inflação nos três primeiros meses de um ano, uma aplicação de R\$12 mil no início do ano, se corrigida pela inflação, apresentaria o seguinte desenvolvimento:

Mês	Correção	Valor corrigido
Primeiro mês	R\$12.000,00 × 1,028	R\$12.336,00
Segundo mês	R\$12.336,00 × 1,014	R\$12.508,70
Terceiro mês	R\$12.508,70 × 1,030	R\$12.883,96

O incremento do valor da aplicação no período é de 7,37%:

$$\frac{12.883,96}{12.000,00} - 1 = 7,37\%,$$

o que equivale ao produto das taxas mensais da inflação, ou seja, a inflação naquele trimestre foi de

$$[(1,028) \times (1,014) \times (1,030)] - 1 = 7,37\%.$$

Como já sabemos temos dois tipos de prazos: (1) aquele a que se refere a taxa de juros e (2) o prazo de ocorrência dos juros. Admitamos um empréstimo bancário com taxa de 24% a.a. (o prazo a que se refere a taxa de juros é portanto anual). Ao se estabelecer que os encargos incidirão sobre o principal somente ao final de cada ano estamos identificando a periodicidade da ocorrência dos juros, assim os dois prazos considerados são coincidentes, mas em outros casos os prazos não são coincidentes. Por exemplo, a Caderneta de Poupança, que paga uma taxa de juros de 6% ao ano, que é capitalizada mensalmente em 0,5%. Temos então dois prazos: o *prazo da taxa* (ano) e o *prazo de capitalização* (mês).

No regime de juros simples, diante de sua natureza linear, a transformação de períodos distintos em coincidentes é processada pela *taxa proporcional de juros* também denominada *taxa linear* ou *nominal*. Essa taxa é obtida a partir da divisão entre a taxa de juros da operação e o número de vezes em que ocorrerão os juros. Dessa maneira, as taxas de juros simples se dizem *equivalentes* quando, aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo volume linear de juros. Por exemplo, um capital de \$500 mil se aplicado a 2,5% ao mês ou 15% ao semestre pelo prazo de um ano, produz o mesmo montante linear de juros:

$$J(2,5\% \text{ a.m.}) = 500.000,00 \times 0,025 \times 12 = 150.000,00.$$

$$J(15\% \text{ a.s.}) = 500.000,00 \times 0,15 \times 2 = 150.000,00.$$

O conceito de taxas equivalentes em juros simples permanece válido para o regime de juros compostos diferenciando-se, no entanto, a fórmula de cálculo da taxa de juros:

$$i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1,$$

em que q indica a quantidade de períodos de capitalização.

Portanto, a taxa equivalente mensal de inflação no período anteriormente citado, assim como no regime de juros compostos, é apurada da seguinte maneira:

$$I_q = \sqrt[3]{1,0737} - 1 = 2,4\%.$$

Assim, são válidos para o contexto inflacionário os mesmos conceitos e expressões de cálculos enunciados para juros compostos.

Taxa de desvalorização da moeda

A *taxa de desvalorização da moeda (TDM)* mede a queda no poder de compra da moeda, causada por aumentos de preços. Assim, por exemplo, dada uma inflação de 100% em determinado período - dobrando assim os preços, a capacidade de compra das pessoas é reduzida em 50%, caindo pela metade.

A *TDM* pode ser obtida a partir da fórmula:

$$TDM = \frac{I}{1 + I}, \quad (1.4)$$

em que I é a taxa de inflação registrada no período.

Logo, se a taxa de inflação alcançar 8%, a queda na capacidade de compra registrará 7,4%:

$$TDM = \frac{0,08}{1 + 0,08} = 7,4\%.$$

Assim, quanto maior a inflação, maior será a taxa de desvalorização da moeda, o que define a diminuição do poder de compra. Para que esse último se mantenha inalterado, a renda das pessoas deve ser corrigida em valores correspondentes à inflação do período.

Se tal correção superar o valor da inflação, haverá um ganho real e aumento do poder de compra.

O cálculo da perda do poder de compra do dinheiro nas operações de venda a prazo é uma das aplicações da *TDM*. Já vimos que o dinheiro tem valores diferentes no tempo, justificados pelas taxas de juros e inflação. Se focarmos os olhos apenas na inflação, postergar um recebimento produz uma perda inflacionária determinada pela redução do poder de compra.

Como exemplo admitiremos que uma empresa tenha vendido \$100 mil para recebimento em um prazo de 120 dias. Sendo de 10% a taxa de

inflação do período, a taxa de perda inflacionária assumida pela empresa na operação atinge a TDM de 9,09%:

$$TDM = \frac{I}{1+I} = \frac{0,1}{1,1} = 9,09\%.$$

O poder efetivo de compra do dinheiro ao final do prazo foi reduzido para 90,91% de seu valor, originando uma perda inflacionária de \$9.090,90.

Dessa maneira, a desvalorização de 9,09% apresentada no exemplo, pode ser interpretada como o desconto máximo que a empresa poderia conceder para pagamento imediato, de forma a tornar equivalente a venda à vista ou a prazo.

4 Desenvolvendo o Problema

Explicitadas as ferramentas necessárias para a problematização vamos a ela.

A primeira informação que precisamos levar em conta é o período compreendido entre a data inicial (primeiro trimestre de 2013) e a data final (primeiro trimestre de 2015). Feito isso, é necessário observar qual é o fator acumulado do índice de referência - em nosso caso o IGP-M - no período. É possível consultar o valor desse fator no site [3], que oferece um simulador de correção dos índices de acordo com o período e o índice de referência.

Consultamos então o índice indicado para nosso problema e obtemos os seguintes dados:

$$\begin{aligned} \text{Índice de correção no período:} & \quad 1,1161592. \\ \text{Valor percentual correspondente:} & \quad 11,6159200\%. \end{aligned}$$

Para determinar qual seria o poder de compra do valor de sua bolsa no início de segundo trimestre de 2015, utilizaremos a expressão (1.4), considerando 11,61592% como a TDM :

$$TDM = \frac{0,1161592}{1+0,1161592} = 10,41\%.$$

Assim, a queda no poder de compra registrada nesse período foi equivalente a 10,41%.

Podemos concluir então que quanto maior a inflação, maior será a taxa de desvalorização da moeda, o que define a diminuição do poder de compra.

Para que esse último se mantenha inalterado, a renda das pessoas deve ser corrigida em valores correspondentes à inflação do período.

Se tal correção superar o valor da inflação, haverá um ganho real e aumento do poder de compra.

Nosso outro objetivo era determinar qual seria o reajuste ideal a ser aplicado para que o aluno pudesse adquirir as mesmas coisas que adquiria com R\$400,00 no primeiro trimestre de 2013, ou seja, para recuperar o poder de compra da sua bolsa, devemos proceder da seguinte maneira:

$$400,00 \times 1,1161592 = 446,46.$$

Portanto, deveria haver um reajuste de 11,61592% que é equivalente a R\$46,46.

5 Considerações Finais

Cumpridas as etapas anteriores desse trabalho podemos destacar a importância de se estudar e compreender os conceitos envolvidos no contexto inflacionário, visto que as alterações econômicas provocadas pelo sistema financeiro afetam diretamente nossas vidas quando aumentam ou diminuem nosso poder de compra. Conseqüentemente, para que não sejamos prejudicados ou até mesmo iludidos com o sistema econômico ao qual estamos submetidos, é fundamental conhecer algumas das informações contidas nessa pesquisa. Outro ponto que pode ser destacado aqui é a compreensão dos significados de reajustes salariais que recebemos ou deveríamos receber, sendo possível até mesmo adentrar em questões como lutas sindicalistas ou cortes orçamentários aos quais todos os cidadãos e classes trabalhadoras estão submetidos.

Agradecimentos: Agradeço à orientadora Profa. Dra. Marta Cilene Gaddoti pelas contribuições no desenvolvimento dessa pesquisa e ao Programa de Educação Tutorial–PET pelo financiamento desse trabalho.

Abstract: In this work we will compare currency values in different periods, considering the consequences caused by inflation in each of these values, taking into account, for example, the purchasing power of money.

Keywords: Financial Math; Inflation; Currency Values.

Referências Bibliográficas

- [1] Neto, A.A. *Matemática Financeira e suas Aplicações*, São Paulo, Atlas, 2012
- [2] Portal Brasil. Acesso em 19 de agosto de 2015, <http://www.portalbrasil.net/igpm.htm>
- [3] Clube dos Poupadores. Acesso em 19 de agosto de 2015, <http://www.clubedospoupadores.com/ferramentas/corrigir-valores-pela-inflacao-ipca-igpm-igpdi-inpc.html>

Teorema de Schauder e uma Aplicação

Quédima Carlevaro de Souza¹

Orientador(a): Profa. Dra. Suzete Maria da Silva Afonso

Resumo: O Teorema de Schauder é uma generalização do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Enquanto o Teorema de Brouwer se aplica a espaços euclidianos, o Teorema de Schauder vale em espaços normados de dimensão infinita. Neste trabalho provaremos o Teorema de Schauder e aplicá-lo-emos para investigar a existência de solução para a equação integral de Urysohn.

Palavras-chave: Ponto Fixo; Teorema de Schauder; Equação Integral de Urysohn.

1 Preliminares

Inicialmente, listaremos alguns conceitos e resultados auxiliares para a apresentação do Teorema de Schauder e da aplicação deste à equação integral de Urysohn. Embora nos preocupemos com a exposição de preliminares a abordagem do Teorema de Schauder, informamos que assumimos que o leitor tenha familiaridade com os conceitos de espaço topológico, espaço métrico, sequência, fecho de um conjunto, função contínua, função limitada, diâmetro de um conjunto, conjuntos fechado, limitado, aberto e completo.

Definição 1. Uma cobertura (aberta) de um subconjunto A de um espaço métrico (E, d) é uma família $(O_i)_{i \in I}$ de conjuntos (abertos) cuja reunião contém A .

Definição 2. Dizemos que um espaço métrico (E, d) é compacto se ele satisfaz a seguinte condição:

- (C) toda cobertura aberta de E admite uma subcobertura finita, isto é, dada uma família de conjuntos abertos $(O_i)_{i \in I}$ tal que $E \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, existe um subconjunto finito $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ tal que $E \subset O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$.

¹Bolsista PET

Teorema 1. *Um subconjunto de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Definição 3. Um espaço métrico é sequencialmente compacto se toda seqüência de pontos de E tem uma subsequência convergente.

Definição 4. Dizemos que um subconjunto X de um espaço métrico (E, d) é totalmente limitado se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura finita de E formada por conjuntos de diâmetro menor do que ou igual a ε . Isso equivale a dizer que, para todo $\varepsilon > 0$, existem pontos x_1, \dots, x_m tais que todo ponto $x \in X$ satisfaz $d(x, x_j) \leq \varepsilon$ para algum $j \in \{1, \dots, m\}$.

Teorema 2. *Seja (E, d) um espaço métrico. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- A) E é compacto;
- B) E é sequencialmente compacto;
- C) E é completo e totalmente limitado.

Definição 5. Seja (E, τ) um espaço topológico e seja (F, d) um espaço métrico. Dizemos que um conjunto ξ de aplicações de E em F é equicontínuo no ponto $x_0 \in E$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V_{x_0} de x_0 em E tal que

$$x \in V_{x_0} \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon, \text{ para toda } f \in \xi.$$

É claro que, se o conjunto ξ é equicontínuo no ponto x_0 , então todas as funções $f \in \xi$ são contínuas no ponto x_0 . Dizemos que ξ é equicontínuo se ξ é equicontínuo em todo ponto $x \in E$; neste caso, os elementos de ξ são funções contínuas.

Teorema 3 (Teorema de Ascoli). *Sejam (E, d_1) um espaço métrico compacto, (F, d_2) um espaço métrico completo e $C(E, F)$ o espaço das funções contínuas de E em F munido da métrica da convergência uniforme:*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in E} d_2(f(x), g(x)).$$

Um subconjunto H de $C(E, F)$ é relativamente compacto se, e somente se, ele cumpre as condições:

- (A₁) H é equicontínuo;

(A₂) Para todo $x \in E$, o fecho do conjunto

$$H(x) = \{f(x); f \in H\}$$

é compacto.

Lema 6. Sobre um espaço vetorial E de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.

Lema 7. Se K é um subconjunto convexo compacto de \mathbb{R}^n , então toda aplicação contínua de K em K tem um ponto fixo.

Lema 8. Seja f uma aplicação contínua de um espaço métrico (E, d) num espaço métrico (E', d') e seja K um subconjunto compacto de E . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in E$ com $d(x, y) < \delta$, $\text{dist}(x, K) < \delta$, $\text{dist}(y, K) < \delta$, tem-se $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

2 Teorema de Schauder

Vamos agora enunciar o Teorema de Schauder e constatar que ele é um caso particular de outro teorema que será demonstrado.

Teorema 4 (Teorema de Schauder). Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado e seja K um subconjunto compacto e convexo de E . Então, qualquer aplicação contínua $T : K \rightarrow K$ tem um ponto fixo.

O Teorema 4 é um caso particular do seguinte resultado:

Teorema 5. Seja S um subconjunto convexo de um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ e seja $T : S \rightarrow S$ uma aplicação contínua tal que $T(S) \subset K \subset S$, onde K é compacto; então T tem um ponto fixo.

Prova: A prova será dividida em três partes.

Parte 1: Vamos demonstrar que, dado $\varepsilon > 0$, existem um subconjunto compacto convexo K_ε de S contido num subespaço vetorial de dimensão finita e uma aplicação contínua $P_\varepsilon : K \rightarrow K_\varepsilon$ tal que, para todo $x \in K$, tem-se $\|x - P_\varepsilon x\| < \varepsilon$. De fato: Segue da Propriedade C) do Teorema 2 que, dado $\varepsilon > 0$, existem pontos $x_1, \dots, x_m \in K$ tais que todo $x \in K$ dista de algum deles menos de ε , uma vez que K é compacto. Para $j = 1, \dots, m$,

definimos a função contínua $g_j : K \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_j(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_j\|, & \text{se } \|x - x_j\| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{se } \|x - x_j\| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Temos $\sum_{j=1}^m g_j(x) > 0$, para todo $x \in K$ e, definindo

$$h_j(x) = \frac{g_j(x)}{\sum_{k=1}^m g_k(x)}, j = 1, \dots, m,$$

temos $h_j(x) \geq 0$, $\sum_{j=1}^m h_j(x) = 1$, para todo $x \in K$, e $h_j(x) = 0$, se $\|x - x_j\| \geq \varepsilon$.

Denotamos por K_ε o conjunto convexo

$$\left\{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m; \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1 \right\}.$$

K_ε é a envoltória convexa dos pontos x_1, \dots, x_m e está, pois, contida num subespaço de dimensão finita de E e em S . Do Teorema 1 e do Lema 6 segue que K_ε é compacto.

Definamos $P_\varepsilon : K \rightarrow K_\varepsilon$ por $P_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^m h_j(x)x_j$, para $x \in K$. P_ε é contínua, pois h_j é contínua em K , para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, e

$$x - P_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^m h_j(x)(x - x_j), x \in K,$$

onde, no segundo membro, só as parcelas para as quais $\|x - x_j\| < \varepsilon$ são não-nulas. Portanto,

$$\|x - P_\varepsilon(x)\| \leq \sum_{j=1}^m h_j(x)\|x - x_j\| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in K.$$

Parte 2: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in S$ tal que $\|x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| < \varepsilon$. Com efeito, com a notação utilizada na Parte 1, consideremos a aplicação

$$P_\varepsilon \circ T : x \in S \mapsto P_\varepsilon(Tx) \in K_\varepsilon \subset S.$$

Para a restrição de $P_\varepsilon \circ T$ a K_ε vale o Lema 7 e, portanto, existe $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ tal que $P_\varepsilon(Tx_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Pela Parte 1, considerando $x = Tx_\varepsilon$, temos então $\|P_\varepsilon(Tx_\varepsilon) - Tx_\varepsilon\| < \varepsilon$, ou seja, $\|x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Parte 3: Da Parte 2, segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in S$ tal que

$$\|x_n - Tx_n\| < \frac{1}{n}. \quad (1.1)$$

Temos $Tx_n \in K$ e, sendo K compacto, a sequência $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contém uma subseqüência, a qual denotaremos por $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por simplicidade de notação, que converge para um ponto $x \in K \subset S$. Da relação (1.1) segue que $x_n \rightarrow x$ e, da continuidade de T , segue que $Tx_n \rightarrow Tx$, que, com a relação (1.1), nos fornece $Tx = x$. ■

3 Uma aplicação do Teorema de Schauder

Agora, aplicaremos o Teorema de Schauder para provar a existência de pelo menos uma solução para a equação integral de Urysohn. Antes disso, demonstraremos um resultado que será necessário para tal prova.

Informamos que $C([a, b], \mathbb{R})$ denota o espaço vetorial das funções contínuas de $[a, b]$ em \mathbb{R} munido da norma uniforme: $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$.

Lema 9. *Dada uma função contínua $K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, seja*

$$(kx)(t) = \int_a^t K[t, s, x(s)] ds, \quad t \in [a, b],$$

para $x \in C([a, b], \mathbb{R})$. Então,

I) $kx \in C([a, b], \mathbb{R})$ e a aplicação $x \in C([a, b], \mathbb{R}) \mapsto kx \in C([a, b], \mathbb{R})$ é contínua.

II) k é compacto, isto é, para qualquer $r > 0$, o fecho do conjunto $k(B_r)$ é compacto em $C([a, b], \mathbb{R})$, onde

$$B_r = \{x \in C([a, b], \mathbb{R}); \|x\|_\infty \leq r\}.$$

Prova: I) Vamos primeiramente mostrar que $kx \in C([a, b], \mathbb{R})$ para $x \in$

$C([a, b], \mathbb{R})$. Com efeito, dados $t, t_0 \in [a, b]$, temos

$$|(kx)(t) - (kx)(t_0)| \leq \int_a^t |K[t, s, x(s)] - K[t_0, s, x(s)]| ds + \int_{t_0}^t |K[t_0, s, x(s)]| ds.$$

Como K é uniformemente contínua sobre o compacto $[a, b] \times [a, b] \times x([a, b])$, a primeira integral se torna arbitrariamente pequena com $|t - t_0|$, e o mesmo vale para a segunda, pois K é limitada sobre o compacto $\{t_0\} \times [a, b] \times x([a, b])$.

Agora, verificaremos que a aplicação (não-linear) $x \in C([a, b], \mathbb{R}) \mapsto kx \in C([a, b], \mathbb{R})$ é contínua. De fato, dados $x, x_0 \in C([a, b], \mathbb{R})$, para todo $t \in [a, b]$, temos

$$|(kx)(t) - (kx_0)(t)| = \left| \int_a^t \{K[t, s, x(s)] - K[t, s, x_0(s)]\} ds \right|$$

e, como K é contínua e $[a, b] \times [a, b] \times x_0([a, b])$ é compacto, segue do Lema 8 que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para

$$\|x - x_0\| = \sup_{a \leq s \leq b} |x(s) - x_0(s)| < \delta,$$

tem-se

$$|K(t, s, x(s)) - K(t, s, x_0(s))| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \quad \forall s, t \in [a, b],$$

e, portanto, $\|kx - kx_0\| < (b - a) \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon$.

II) Para demonstrar que k é compacto, basta mostrar que $k(B_r)$ satisfaz as propriedades (A_1) e (A_2) do Teorema 3.

(A_1) $k(B_r)$ é equicontínuo: De fato, K é uniformemente contínua e limitada em $[a, b] \times [a, b] \times D_r$, onde $D_r = \{z \in \mathbb{R}; \|z\| \leq r\}$, $r > 0$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $|t_1 - t_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$ e $|z_1 - z_2| < \delta$, com $z_1, z_2 \in D_r$, temos $|K(t_1, s_1, z_1) - K(t_2, s_2, z_2)| < \varepsilon$. Assim, para $|t - t_0| < \delta$ e $x \in B_r$, temos

$$\begin{aligned} |(kx)(t) - (kx)(t_0)| &\leq \int_a^t |K[t, s, x(s)] - K[t_0, s, x(s)]| ds \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t K[t_0, s, x(s)] ds \right| \\ &\leq (b - a)\varepsilon + |t - t_0|M, \end{aligned}$$

onde

$$M = \sup\{|K(t, s, z)|; s, t \in [a, b], z \in D_r\}.$$

(A₂) Para todo $t_0 \in [a, b]$, o conjunto

$$(kB_r)(t_0) = \left\{ \int_a^{t_0} K[t_0, s, x(s)] ds \in \mathbb{R}; x \in B_r \right\}$$

é limitado em \mathbb{R} , pois K é limitada em $[a, b] \times [a, b] \times D_r$. Portanto, o fecho do conjunto $(kB_r)(t_0)$ é compacto, pelo Teorema 1. ■

No que segue, usamos a seguinte notação: dada uma função contínua $K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dado $r > 0$, escrevemos

$$\|K\|_r = \sup\{|K(t, s, z)|; s, t \in [a, b], z \in \mathbb{R}, |z| \leq r\}.$$

Teorema 6. *Seja $K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Para toda $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, existe $\lambda_f \in]0, \infty]$ tal que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ com $|\lambda| < \lambda_f$, existe pelo menos uma função $y \in C([a, b], \mathbb{R})$ solução da equação integral de Urysohn:*

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K[t, s, y(s)] ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (1.2)$$

Prova: Para quaisquer $x \in E = C([a, b], \mathbb{R})$ e $t \in [a, b]$, definimos

$$(kx)(t) = \int_a^b K[t, s, x(s)] ds.$$

No Lema 9, vimos que $kx \in E$, k é um operador contínuo de E em E e k é compacto. Portanto, para toda $f \in E$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, também é compacto o operador

$$T = T_{f, \lambda} : x \in E \mapsto Tx = f + \lambda Kx \in E.$$

Dado $r > 0$, seja $B_r = \{x \in E; \|x\| \leq r\}$. Tomando $r > \|f\|_\infty$, para

$$|\lambda| \leq \frac{r - \|f\|_\infty}{(b-a)\|K\|_r},$$

temos $T(B_r) \subset B_r$. De fato, dados $x \in B_r$ e $t \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &= \left| f(t) + \lambda \int_a^b K[t, s, x(s)] ds \right| \\ &\leq |f(t)| + |\lambda|(b-a)\|K\|_r \\ &\leq \|f\|_\infty + \frac{r - \|f\|_\infty}{(b-a)\|K\|_r} (b-a)\|K\|_r \\ &= r. \end{aligned}$$

Do Teorema 4 segue, então, que $T_{f,\lambda}$ tem um ponto fixo $y \in B_r$, isto é, que a Equação (1.2) tem uma solução $y \in B_r$.

Mais geralmente, podemos tomar $\lambda \in \mathbb{R}$ com

$$|\lambda| < \lambda_f = \sup_{r>0} \frac{r - \|f\|_\infty}{(b-a)\|K\|_r}. \quad \blacksquare$$

4 Considerações Finais

O Teorema de Schauder é um resultado sobre existência de pontos fixos. Tem grande utilidade na teoria de equações diferenciais, pois, através dele, podemos garantir existência de solução para certas classes de equações. No Teorema 3, vimos que a equação integral de Urysohn tem pelo menos uma solução. A mesma conclusão pode ser obtida para a equação integral de Hammerstein (veja a referência 1, página 171) e para a equação integral de Volterra (veja a referência 1, página 172).

Agradecimentos: Agradeço ao PET pelo apoio financeiro; aos meus pais, Paulino e Maria, por me apoiarem e incentivarem a continuar sempre apesar das dificuldades, a Profa. Dra. Suzete Maria da Silva Afonso por me orientar e me aconselhar sempre, fazendo dos estudos algo prazeroso e gratificante, e a Deus por me abençoar e me permitir ter a oportunidade que hoje tenho.

Abstract: The Schauder Theorem is a generalization of Brouwer Fixed Point Theorem. While Brouwer's Theorem applies to Euclidean spaces, the Schauder Theorem is valid in infinite-dimensional normed spaces. In this work we prove the Schauder Theorem and we apply it to investigate the existence of solution to the Urysohn integral equation.

Keywords: Fixed Point, Schauder Theorem, Urysohn Integral Equation.

Referências Bibliográficas

- [1] Hoing, Chain Samuel, *Aplicações da Topologia à Análise*, Textos Universitários do IME-USP, São Paulo, 2011.

Teorema de Hahn–Banach e aplicações

Raul Felipe de Oliveira Francisco¹

Orientador(a): Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

Resumo: Neste trabalho será apresentada a Forma Analítica do Teorema de Hahn–Banach. Este resultado trata de extensões de funcionais definidos em subespaços a todo espaço vetorial. Através deste resultado, responderemos afirmativamente as seguintes questões: Em qualquer espaço vetorial normado não-trivial existem funcionais lineares contínuos não-nulos? O dual topológico E' de um espaço vetorial normado não-trivial E separa pontos de E ? Existe um funcional linear contínuo (não-nulo) que se anula num subespaço (próprio) dado? Se o espaço dos operadores lineares limitados $T : E \rightarrow F$, onde $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ são espaços normados sobre \mathbb{R} ou \mathbb{C} , é de Banach, então $(F, \|\cdot\|_F)$ também é um espaço de Banach?

Palavras-chave: Funcionais lineares; Funcionais limitados; Teorema de Hahn–Banach.

1 Conceitos, notações e resultados preliminares

A princípio, listaremos conceitos e resultados de caráter preliminar para a apresentação do Teorema de Hahn–Banach e de suas aplicações.

Definição 1. Sejam E e F espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} . Dizemos que $T : E \rightarrow F$ é um operador linear se $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ para quaisquer $x, y \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Se $F = \mathbb{K}$, dizemos que T é um funcional linear.

Definição 2. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados sobre um corpo \mathbb{K} . Dizemos que um operador $T : E \rightarrow F$ é contínuo num ponto $x \in E$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in E, \|x - y\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\|_F < \epsilon.$$

Dizemos que T é contínuo em E se T for contínuo em qualquer ponto $x \in E$.

¹Bolsista PET

Definição 3. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados sobre um corpo \mathbb{K} . Dizemos que um operador $T : E \rightarrow F$ é limitado quando existe uma constante positiva c tal que $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$, para todo $x \in E$.

Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados sobre um corpo \mathbb{K} . Denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço dos operadores lineares de E em F e por $L(E, F)$ o espaço dos operadores lineares limitados de E em F .

Observação 4. Se $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ são espaços vetoriais normados sobre um corpo \mathbb{K} , é fácil verificar que a aplicação $\|\cdot\|_{L(E, F)} : L(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|T\|_{L(E, F)} = \sup_{\substack{x \in E; \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}, \text{ para } T \in L(E, F), \quad (1.1)$$

define uma norma em $L(E, F)$.

Portanto, se $T \in L(E, F)$, podemos afirmar que

$$\|T(x)\|_F \leq \|T\|_{L(E, F)}\|x\|_E, \quad (1.2)$$

para todo $x \in E$.

Seja E um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} . Denotamos por E^* o espaço dos funcionais lineares $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ e por E' o espaço dos funcionais lineares limitados $f : E \rightarrow \mathbb{K}$. E^* é denominado dual algébrico de E e E' dual topológico de E .

O resultado a seguir garante que todo operador linear limitado entre espaços normados é contínuo, assim como todo operador linear contínuo entre espaços normados é limitado.

Teorema 5. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados sobre um corpo \mathbb{K} e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) T é contínuo;
- ii) T é contínuo na origem;
- iii) T é limitado.

Prova: $i) \Rightarrow ii)$. Segue da Definição 2.

$ii) \Rightarrow iii)$. Suponha que T não seja limitado. Dessa forma, para todo $k \in \mathbb{N}$, poderíamos encontrar $x_k \in E$ tal que $\|T(x_k)\|_F > k\|x_k\|_E$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $z_k = \frac{x_k}{\|T(x_k)\|_F}$. Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k\|_E = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T(z_k)\|_F = 1$, o que fere a continuidade de T na origem.

$iii) \Rightarrow i)$. Da definição de $\|T\|_{L(E,F)}$ dada em (1.1), segue que $\|T(x)\|_F \leq \|T\|_{L(E,F)}\|x\|_E$, para todo $x \in E$ (veja (1.2)). Logo, se $x_1, x_2 \in E$, temos $\|T(x_1) - T(x_2)\|_F = \|T(x_1 - x_2)\|_F \leq \|T\|_{L(E,F)}\|x_1 - x_2\|_E$, de onde se conclui que T é contínuo. ■

2 Forma Analítica do Teorema de Hahn–Banach

Serão apresentadas duas versões da Forma Analítica do Teorema de Hahn–Banach, uma para espaços vetoriais reais e outra para espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} , sendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Atentamos que, para demonstrar a Forma Analítica do Teorema de Hahn–Banach para espaços vetoriais reais, a ferramenta utilizada será o Teorema de Kuratowski–Hausdorff, conhecido na literatura como Lema de Zorn (o mérito deste resultado foi dado à Max Zorn em 1935, porém o mesmo resultado já havia sido obtido por Kuratowski em 1922 a partir do Princípio de Maximalidade de Hausdorff, que foi provado em 1914). Antes de enunciar tal resultado, exporemos alguns conceitos preliminares.

Definição 6. Uma ordenação parcial num conjunto X é uma relação binária em X , que denotaremos por “ \leq ”, reflexiva ($\xi \leq \xi$, para todo $\xi \in X$), transitiva ($\xi \leq \eta$ e $\eta \leq \zeta \Rightarrow \xi \leq \zeta$, para $\xi, \eta, \zeta \in X$) e antissimétrica ($\xi \leq \eta$ e $\eta \leq \xi \Rightarrow \xi = \eta$, para $\xi, \eta \in X$).

Se \leq é uma ordenação parcial em X , então (X, \leq) é dito ser um conjunto parcialmente ordenado.

Definição 7. Um conjunto totalmente ordenado é um conjunto parcialmente ordenado no qual quaisquer dois elementos são comparáveis de acordo com a ordenação parcial dada.

Definição 8. Seja (X, \leq) um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que $\zeta \in X$ é um elemento maximal em X se para todo $\xi \in X$ com $\zeta \leq \xi$, tem-se $\xi = \zeta$. Um elemento $\eta \in X$ é uma cota superior de $Y \subset X$ se $\xi \leq \eta$, para todo $\xi \in Y$.

Lema 9 (Teorema de Kuratowski–Hausdorff/Lema de Zorn). *Um conjunto não-vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.*

Utilizando o lema acima apresentado, provaremos o Teorema de Hahn–Banach para espaços vetoriais reais.

Teorema 10 (Teorema de Hahn–Banach - Forma analítica). *Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e seja $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = ap(x), \quad \forall a \geq 0, \forall x \in E \quad (1.3)$$

e

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \quad (1.4)$$

Se G é um subespaço vetorial de E e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G,$$

então existe um funcional linear $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende g ($T|_G \equiv g$) e satisfaz $T(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Prova: Consideremos \mathcal{P} o seguinte conjunto:

$$\{h : D(h) \subset E \rightarrow \mathbb{R}; D(h) \text{ é subespaço vetorial de } E, h \text{ é linear, } \\ G \subseteq D(h), h \text{ estende } g \text{ e } h(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in D(h)\}.$$

Em \mathcal{P} , definimos a ordenação parcial:

$$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subseteq D(h_2) \quad \text{e} \quad h_2|_{D(h_1)} \equiv h_1. \quad (1.5)$$

Note que \mathcal{P} é não-vazio, pois $g \in \mathcal{P}$. Além disso, para todo subconjunto totalmente ordenado de \mathcal{P} , existe uma cota superior. Com efeito, seja Q um subconjunto totalmente ordenado de \mathcal{P} arbitrário e defina $h : D(h) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $D(h) = \bigcup_{f \in Q} D(f)$, por

$$h(x) = f(x), \text{ se } x \in D(f).$$

É fácil verificar, através da relação de ordem estabelecida em (1.5), que:

- h está bem definida;

- $h \in \mathcal{P}$;
- h é uma cota superior para Q .

Portanto, pelo Lema 9, concluímos que \mathcal{P} admite um elemento maximal, o qual será denotado por T . Mostraremos que $D(T) = E$. Suponha que $D(T) \neq E$. Escolha $x_0 \in E - D(T)$ e defina $r : D(r) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $D(r) = D(T) + [x_0]$, por $r(x + tx_0) = T(x) + t\alpha$, para $x \in D(T)$, onde α é uma constante que será definida depois, de modo que tenhamos $r \in \mathcal{P}$. Informamos que $[x_0]$ denota o subespaço de E gerado por x_0 .

Queremos, por enquanto, que α seja escolhido de modo a termos satisfeitas as desigualdades abaixo:

$$\begin{aligned} T(x) + \alpha &= r(x + x_0) \leq p(x + x_0), \text{ para todo } x \in D(T); \\ T(x) - \alpha &= r(x - x_0) \leq p(x + x_0), \text{ para todo } x \in D(T). \end{aligned}$$

Para tanto, basta escolher α de modo que

$$\sup_{x \in D(T)} T(x) - p(x - x_0) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(T)} p(x + x_0) - T(x).$$

Felizmente, tal escolha é possível, pois se $x, y \in D(T)$, temos:

$$T(x) + T(y) = T(x + y) \leq p(x + y) = p(x + x_0 + y - x_0) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

Consequentemente,

$$T(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - T(x), \text{ para quaisquer } x, y \in D(T).$$

Então, se $t \geq 0$, temos

$$r(x + tx_0) = r\left(t\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right) = tr\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0)$$

e se $t < 0$, temos

$$\begin{aligned} r(x + tx_0) &= r\left(-t\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)\right) = -tr\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) = \\ &= -t\left(T\left(\frac{x}{-t}\right) - \alpha\right) \leq -tp\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) = p(x + tx_0). \end{aligned}$$

Dessa forma, $r \in \mathcal{P}$, $T \leq r$ e $T \neq r$, e isso fere a maximalidade de T . Portanto, temos que $D(T) = E$ e a prova está completa. ■

Teorema 11 (Teorema de Hahn–Banach - Versão generalizada). *Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) e seja $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a|p(x), \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad (1.6)$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \quad (1.7)$$

Se G é um subespaço vetorial de E e $g : G \rightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que

$$|g(x)| \leq p(x), \forall x \in G, \quad (1.8)$$

então existe um funcional linear $T : E \rightarrow \mathbb{K}$ que estende g ($T|_G \equiv g$) e satisfaz $|T(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Prova: Vamos dividir a prova em dois casos, quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Caso 1: Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

De (1.6) e (1.7) segue que p cumpre as condições (1.3) e (1.4). E de (1.8) segue que $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in G$. Pelo Teorema de Hahn–Banach para espaços vetoriais reais (Teorema 10), existe um funcional linear $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x) = g(x)$, para todo $x \in G$ e

$$T(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in E. \quad (1.9)$$

Da Desigualdade (1.9) segue que

$$-T(x) = T(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x), \text{ para todo } x \in E. \quad (1.10)$$

De (1.9) e (1.10) concluímos que $|T(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Caso 2: Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Podemos escrever $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$, para $x \in G$, onde g_1 e g_2 assumem valores reais. Como artifício, vamos considerar E e G como espaços vetoriais reais que serão denotados, respectivamente, por E_r e G_r . Como g é linear, é claro que g_1 e g_2 são funcionais lineares sobre G_r .

Como $g_1(x) \leq |g(x)|$, segue que $g_1(x) \leq p(x)$, para todo $x \in G$. Pelo Teorema de Hahn–Banach para espaços vetoriais reais (Teorema 10), existe um funcional linear $T_1 : E_r \rightarrow \mathbb{R}$ que estende g_1 e cumpre $T_1(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E_r$.

Agora vamos estudar o caso de g_2 . Note que, se $x \in G$, $i[g_1(x) + ig_2(x)] = ig(x) = g(ix) = g_1(ix) + ig_2(ix)$. Assim, se $x \in G$, temos $g_2(x) = -g_1(ix)$. Então, definamos, para todo $x \in E$, $T : E \rightarrow \mathbb{C}$, por

$T(x) = T_1(x) - iT_1(ix)$. Portanto, $T(x) = g(x)$, para todo $x \in G$. Nos resta mostrar que T é um funcional linear em E (no espaço complexo) e que $|T(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

• T é linear:

Dados $x \in E$ e $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$, temos $T((a + bi)x) = T_1(ax + ibx) - i(T_1(i(a + bi)x)) = aT_1(x) + bT_1(ix) - i[aT_1(ix) - bT_1(x)] = (a + bi)[T_1(x) - iT_1(ix)] = (a + bi)T(x)$.

Além disso, se $x, y \in E$, temos $T(x + y) = T_1(x + y) - iT_1(I(x + y)) = T_1(x) + T_1(y) - (iT_1(ix) + iT_1(iy)) = T_1(x) - iT_1(ix) + T_1(y) - iT_1(iy) = T(x) + T(y)$, pela linearidade de T_1 .

• $|T(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Se $x \in E$ é tal que $T(x) = 0$, o resultado é imediato, pois sabemos que $p(x) \geq 0$. Seja $x \in E$ tal que $T(x) \neq 0$. Então, $T(x) = |T(x)|e^{i\theta}$, de onde segue que $|T(x)| = e^{-i\theta}T(x) = T(e^{-i\theta}x)$. Como $|T(x)|$ é real, segue que $|T(x)| = T(e^{-i\theta}x) = T_1(e^{-i\theta}x) \leq |(e^{-i\theta})|p(x) = p(x)$. ■

O ponto principal do Teorema de Hahn–Banach não é a simples existência da extensão de um funcional linear, mas sim a existência de uma extensão linear dominada por p .

Uma consequência importante do Teorema de Hahn–Banach é a existência de extensões lineares limitadas de funcionais limitados definidos em subespaços de espaços vetoriais normados, a qual segue abaixo.

Corolário 12. *Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , G um subespaço de um espaço vetorial real normado $(E, \|\cdot\|_E)$ sobre \mathbb{K} e $g : G \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um funcional linear contínuo $T : E \rightarrow \mathbb{K}$ que estende g e $\|T\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.*

Prova: Definamos a função $p : E \rightarrow \mathbb{K}$ por $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|_E$. Como g é um funcional linear contínuo, segue que $|g(x)| \leq \|g\|_{G'}\|x\|_E$, para todo $x \in G$, pela Observação 4. É fácil verificar que p satisfaz as condições (1.6) e (1.7) do Teorema 11. Então, pelo Teorema 11, existe uma extensão linear $T : E \rightarrow \mathbb{K}$ de g tal que

$$|T(x)| \leq p(x) = \|g\|\|x\|_E, \quad \forall x \in E. \quad (1.11)$$

Disto segue que $\|T\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}$, de onde T é um funcional limitado e, portanto, contínuo (veja o Teorema 5). Além disso, por T ser uma extensão

de g , temos:

$$\|T\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|T(x)|}{\|x\|_E} \geq \sup_{\substack{x \in G \\ x \neq 0}} \frac{|T(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in G \\ x \neq 0}} \frac{|g(x)|}{\|x\|_E} = \|g\|_{G'}. \quad (1.12)$$

Por (1.11) e (1.12), concluímos que $\|T\|_{E'} = \|g\|_{G'}$. ■

3 Aplicações do Teorema de Hahn–Banach

No que segue, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposição 13. *Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço vetorial normado não-trivial sobre \mathbb{K} e E' seu dual topológico. Se $x \neq 0$, então existe $f \in E'$ tal que $f(x) = \|x\|_E$ e $\|f\|_{E'} = 1$.*

Prova: Para demonstrar este resultado basta aplicar o Teorema 11 sob as seguintes condições: O funcional $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $p(x) = \|x\|_E$ para todo $x \in E$; o subespaço G de E é o subespaço gerado por x , ou seja, $G = [x]$ e o funcional linear $g : G \rightarrow \mathbb{K}$ é definido por $g(\zeta x) = \zeta \|x\|_E$, para todo $\zeta \in \mathbb{K}$. ■

Para o bom entendimento da próxima proposição, precisamos ter acesso ao seguinte conceito:

Definição 14. Dizemos que uma família \mathcal{F} de funcionais separa pontos de um conjunto X quando, para quaisquer elementos $x, y \in X$ distintos, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Proposição 15. *Se $(E, \|\cdot\|_E)$ é um espaço vetorial normado não-trivial sobre \mathbb{K} , então E' separa pontos de E .*

Prova: Com efeito, dados $x, y \in E$, $x \neq y$, temos que $x - y \neq 0$ e, pela Proposição 13, existe $f \in E'$ tal que $f(x) - f(y) = f(x - y) = \|x - y\|_E \neq 0$. ■

Proposição 16. *Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço vetorial normado sobre \mathbb{K} , M um subespaço vetorial fechado próprio de E e $\xi \in E - M$. Se $0 < \delta = d(\xi, M) = \inf_{\eta \in M} \|\xi - \eta\|_E$, então existe $f \in E'$ tal que*

$$\|f\|_{E'} = 1, \quad f(\xi) = \delta \quad \text{e} \quad f|_M = 0.$$

Prova: A distância δ entre ξ e o subespaço M é maior do que zero pois M é fechado. Consideremos $G = M + [\xi]$ e definamos o funcional linear $g : G \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$g(\eta + t\xi) = t\delta, \quad \eta \in M, t \in \mathbb{K}.$$

Claramente $g|_M = 0$. Pela definição de δ temos (para $t \neq 0$):

$$|g(\eta + t\xi)| = |t|\delta \leq |t| \left\| \frac{\eta}{t} + \xi \right\|_E = \|\eta + t\xi\|_E,$$

e, assim,

$$\|g\|_{G'} \leq 1. \quad (1.13)$$

Além disso, para cada $\eta \in M$, temos:

$$\|g\|_{G'} \geq \frac{|g(-\eta + \xi)|}{\|-\eta + \xi\|_E} = \frac{\delta}{\|-\eta + \xi\|_E} \geq \frac{\delta}{\inf_{\eta \in M} \|-\eta + \xi\|_E} = \frac{\delta}{\delta} = 1. \quad (1.14)$$

De (1.13) e (1.14) segue que $\|g\|_{G'} = 1$. Aplicando o Corolário 12, obtemos o desejado. \blacksquare

É sabido que se $(F, \|\cdot\|_F)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{K} , então o espaço $(L(E, F), \|\cdot\|_{L(E, F)})$ é de Banach. A partir do Teorema de Hahn–Banach, vemos que a recíproca desse resultado é verdadeira.

Proposição 17. *Se o espaço $(L(E, F), \|\cdot\|_{L(E, F)})$ é de Banach sobre \mathbb{K} , então $(F, \|\cdot\|_F)$ também é um espaço de Banach sobre \mathbb{K} .*

Prova: Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em F . Tome $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\|_E = 1$. Pela Proposição 13, existe um funcional linear limitado $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $f(x_0) = \|x_0\|_E = 1$ e $\|f\|_{E'} = 1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $T_n : E \rightarrow F$ por $T_n(x) = f(x)y_n$, para $x \in E$.

Afirmamos que T_n é linear. De fato, para $x_1, x_2 \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos que $T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) = (f(\alpha x_1 + \beta x_2))(y_n) = \alpha f(x_1)y_n + \beta f(x_2)y_n = \alpha T_n(x_1) + \beta T_n(x_2)$.

Além disso, $\|T_n(x)\|_F = \|f(x)y_n\|_F = |f(x)|\|y_n\|_F \leq \|f\|_{E'}\|x\|_E\|y_n\|_F = \|x\|_E\|y_n\|_F$, de onde segue que $\frac{\|T_n(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \|y_n\|_F$ e, por conseguinte, $\|T_n\|_{L(E, F)} \leq \|y_n\|_F$. Daí, a sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, uma vez que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada por ser uma sequência de Cauchy.

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n \in (L(E, F), \|\cdot\|_{L(E, F)})$.

Vamos mostrar, agora, que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$, temos:

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - T_m(x)\|_F &= \|f(x)y_n - f(x)y_m\|_F = |f(x)| \|y_n - y_m\|_F \\ &\leq \|f\|_{E'} \|x\|_E \|y_n - y_m\|_F = \|x\|_E \|y_n - y_m\|_F. \end{aligned}$$

Daí, $\|T_n - T_m\|_{L(E,F)} \leq \|y_n - y_m\|_F$. Como $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, desta última desigualdade segue que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(L(E, F), \|\cdot\|_{L(E,F)})$. Sendo $(L(E, F), \|\cdot\|_{L(E,F)})$ um espaço de Banach, podemos afirmar que existe $T \in (L(E, F), \|\cdot\|_{L(E,F)})$ tal que $T_n \rightarrow T$ quando $n \rightarrow \infty$, donde $\|T_n - T\|_{L(E,F)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Afirmamos que $y_n \rightarrow T(x_0)$ quando $n \rightarrow \infty$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \|y_n - T(x_0)\|_F &= \|f(x_0)y_n - T(x_0)\|_F = \|T_n(x_0) - T(x_0)\|_F \\ &\leq \|T_n - T\|_{L(E,F)} \|x_0\|_E \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, F é um espaço de Banach. ■

Agradecimentos: Eu agradeço a minha orientadora, Profa. Dra. Suzete, pela oportunidade de realizar este trabalho, pela paciência e pela dedicação que teve em nossos seminários e pelo apoio emocional, profissional e pessoal que me agraciou durante todo o processo. Agradeço também ao PET pelo apoio financeiro.

Abstract: In this work, we will present the Analytic Form of the Hahn Banach Theorem. By Hahn–Banach theorem, we show the existence of bounded linear extensions of bounded linear functional defined on subspaces of normed vector spaces. Moreover, with this result, we will respond positively to interesting questions as: Are there non-zero continuous linear functionals in any nontrivial normed vector space? Is there a non-zero continuous linear functional that vanishes in a given (own) subspace? If the space of the bounded linear operators $T : E \rightarrow F$, where $(E, \|\cdot\|_E)$ and $(F, \|\cdot\|_F)$ are normed vector spaces over \mathbb{R} or \mathbb{C} , is Banach, then is $(F, \|\cdot\|_F)$ a Banach space?

Keywords: Linear functionals; Bounded functionals; Hahn–Banach Theorem.

Referências Bibliográficas

- [1] Brézis, H., *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.
- [2] De Oliveira, C. R., *Introdução à Análise Funcional*. Publicações Matemáticas. Impa, 2007.

Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento e Extensão de Soluções

Raul Lima¹

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: Definiremos equação diferencial funcional com retardamento (EDFR) e solução. Enunciaremos o Teorema de Existência e Unicidade para este tipo de equação e exibiremos um exemplo de como encontrar uma solução para um PVI utilizando o método passo-a-passo. Por fim mostraremos, sob certas condições, que podemos estender uma solução de uma EDFR.

Palavras-chave: EDFR; solução; extensão.

1 Equação Diferencial Funcional com Retardamento

Sejam h, H com $0 \leq h < \infty$, $0 < H < \infty$, considere

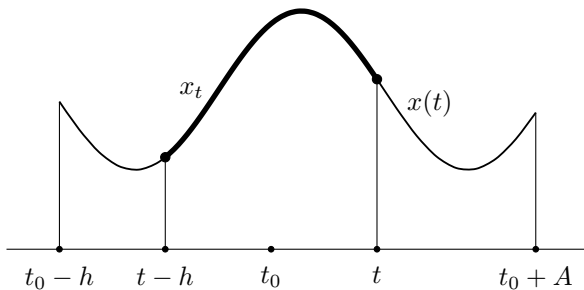
$$C_H = \{\varphi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|\varphi\| < H\},$$

onde $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-h, 0]$ no \mathbb{R}^n com a norma $\|\varphi\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$, $|\cdot|$ denotando um norma usual do \mathbb{R}^n . No caso $H = \infty$, $C_H = C_\infty = C$, pois considera-se todas as aplicações contínuas de $[-h, 0]$ no \mathbb{R}^n .

Sejam A , $0 < A < \infty$ e $x : [t_0 - h, t_0 + A] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Considere t , $t_0 \leq t < t_0 + A$. Defina x_t , o elemento de C dado por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ para $-h \leq \theta \leq 0$.

Na figura abaixo, caso $n = 1$, está representado o elemento x_t .

¹Bolsista PET



Definição 1. Seja

$$f : [0, \infty) \times C_H \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, \varphi) \mapsto f(t, \varphi).$$

A equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

é chamada uma equação diferencial com retardamento.

Definição 2. Uma função contínua $x : [t_0 - h, t_0 + A) \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $0 < A \leq \infty$, $t_0 \geq 0$, é dita solução de (1.1) se existir a derivada de x em $[t_0, t_0 + A)$ e $\dot{x} = f(t, x_t)$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$.

Observação 3. Note que se $h = 0$, então a equação diferencial com retardamento se reduz a uma equação diferencial ordinária. Portanto, as EDFR englobam as EDO.

Definição 4. Um problema de valor inicial para uma EDFR, consiste de uma equação do tipo (1.1), e uma função inicial $\varphi \in C$, tal que $x_{t_0} = \varphi$.

Vamos enunciar o Teorema de Existência e Unicidade, cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 5 (Existência e Unicidade de Solução para EDFR). *Seja uma função $f(t, \varphi)$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a φ em $[0, \infty) \times C_H$. Então, para qualquer $t_0 \geq 0$, $\psi \in C_H$, existem $A > 0$ e função x definida em $[t_0 - h, t_0 + A)$ que é solução de (1.1) com função inicial ψ em t_0 . Além disso, esta solução é única.*

Podemos notar que as soluções de uma EDFR, diferente do que ocorrem em EDO, podem se interceptar em um número infinito de pontos e

ainda serem distintas. Elas serão iguais apenas se coincidirem em um intervalo de comprimento do retardo.

Os exemplos a seguir nos mostram como obter uma solução para um PVI em EDFR através do método passo-a-passo, além de mostrar que duas soluções de uma mesma EDFR podem se intersectar em um número infinito de pontos e ainda serem distintas

Exemplo 6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = x(t - \frac{3\pi}{2}), \\ x_0 = \text{sen } \theta, \end{cases} \quad \theta \in [-\frac{3\pi}{2}, 0]. \quad (1.2)$$

O método passo-a-passo caracteriza-se pela construção da solução em intervalos da reta que possuem o comprimento igual ao do retardo. Na resolução será evidenciada a necessidade de termos uma função como condição inicial e a dependência do conhecimento do intervalo anterior para construirmos em intervalos a solução.

1. Denote por $x^1(t)$ a solução de (1.2) em $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$. Observe que

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2} &\Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq (t - \frac{3\pi}{2}) \leq 0 \\ &\Rightarrow x_1(t - \frac{3\pi}{2}) = x_0(t - \frac{3\pi}{2}) \\ &\Rightarrow x_1(0) = x_0(0) = \text{sen}(0) = 0. \end{aligned}$$

Desta forma $x^1(t)$, com $t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ deve satisfazer

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x(t - \frac{3\pi}{2}), \\ x_0 = \text{sen } \theta. \end{cases} \quad (1.3)$$

Integrando a primeira equação temos:

$$\int_0^t \dot{x}^1(s) ds = \int_0^t x\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds \Rightarrow x^1(t) = \int_0^t x\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds.$$

Como $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq (t - \frac{3\pi}{2}) \leq 0$ então de (1.2) temos $x_0(t) = \text{sen } t$, para $\theta \in [-\frac{3\pi}{2}, 0]$. Logo,

$$x_1(t) = \int_0^t \text{sen}\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds = -\cos\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) \Big|_0^t = \text{sen } t.$$

2. Denote por $x^2(t)$ a solução de (1.2) em $[\frac{3\pi}{2}, 3\pi]$. Analogamente, $x^2(3\pi/2) = -1$. Então $x^2(t)$ deve satisfazer

$$\begin{cases} \dot{x}^2 = x^2(t - \frac{3\pi}{2}), \\ x^2_{3\pi/2}(t) = \text{sen } t. \end{cases} \quad (1.4)$$

Da mesma maneira, temos:

$$\begin{aligned} x^2(t) &= -1 + \int_{\frac{3\pi}{2}}^t \text{sen} \left(s - \frac{3\pi}{2} \right) ds = \\ &= -1 + \left[-\cos \left(s - \frac{3\pi}{2} \right) \right] \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^t = \text{sen } t. \end{aligned}$$

Repetindo o processo para os intervalos seguintes, a solução do PVI é dada por

$$\begin{cases} \psi(t) = \text{sen } t, & \text{para } t \in [-\frac{3\pi}{2}, 0], \\ x(t) = \text{sen } t, & \text{para } t \in [0, \infty). \end{cases}$$

De forma análoga ao exemplo anterior, pelo método passo-a-passo, aplicado ao PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = x(t - \frac{3\pi}{2}), \\ x_0 = \cos t, \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [-\frac{3\pi}{2}, 0].$$

1. Seja $x^1(t)$ a solução de (1.2) em $[0, \frac{3\pi}{2}]$, onde $x^1(0) = 1$. Logo $x^1(t)$ deve satisfazer

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^1(t - \frac{3\pi}{2}), \\ x^1 + 0 = \cos \theta, \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [-\frac{3\pi}{2}, 0]. \quad (1.5)$$

E então,

$$x^1(t) = \int_0^t \cos \left(s - \frac{3\pi}{2} \right) ds = 1 + \text{sen} \left(t - \frac{3\pi}{2} \right) + 1 = \cos t.$$

2. Denote por $x^2(t)$ a solução de (1.2) em $[\frac{3\pi}{2}, 3\pi]$. Então $x^2(t)$ deve satisfazer

$$\begin{cases} \dot{x}^2 = x^2(t - \frac{3\pi}{2}), \\ x^2_{3\pi/2}(t) = \cos t. \end{cases} \quad (1.6)$$

Pelo método passo-a-passo, segue que

$$x^2(t) = \int_{\frac{3\pi}{2}}^t \cos \left(s - \frac{3\pi}{2} \right) ds = \text{sen} \left(t - \frac{3\pi}{2} \right) = \cos t.$$

Procedendo da mesma forma para os intervalos seguintes, obtemos

$$\begin{cases} \psi(t) = \cos t & \text{para } t \in [-\frac{3\pi}{2}, 0], \\ x(t) = \cos t & \text{para } t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Assim, temos duas soluções da mesma equação diferencial com retardamento cujos gráficos se encontram em um número infinito de pontos. Isso, no caso de uma EDO, nunca poderia ocorrer. Neste caso, com o método passo-a-passo vemos que é possível determinar a solução em $[0, \infty)$, porém se quisermos determinar a solução para todo número real ou determinar qual é o intervalo máximo em que a função x é solução é necessário estabelecer outras condições, como veremos a seguir.

2 Extensão de Solução

Nesta seção iremos assumir as seguintes hipóteses:

1. O segundo membro da equação $\dot{x}(t) = f(t, \varphi)$ é uma função contínua que leva conjuntos $[0, \tau] \times C_{H_1}$ em conjuntos limitados do \mathbb{R}^n para todo τ, H_1 , tais que $0 < \tau < \infty$, $0 < H_1 < H$.
2. Há alguma condição de unicidade relativamente ao problema de função inicial, isto é, se $x(t)$ e $y(t)$ são duas soluções definidas em algum intervalo comum $[t_0 - h, t_0 + \delta)$, $0 < \delta \leq \infty$, com $x_{t_0} = y_{t_0}$, então, $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0 - h, t_0 + \delta)$.

Como consequência do Teorema 5 segue que (i) e (ii) são satisfeitas no caso em que o segundo membro da equação é uma função contínua, localmente lipschitziana relativamente a φ .

Indicaremos por $x(t, t_0, \varphi)$ a solução da equação (1.1) cuja função inicial em t_0 é φ . Usamos a notação $x_t(t_0, \varphi)$ para indicar o elemento de C dado por $x_t(t_0, \varphi)(\theta) = x(t + \theta, t_0, \varphi)$.

As seguintes propriedades são verdadeiras relativamente ao problema de extensão de soluções de (1.1), supostas satisfeitas as condições (1) e (2):

1. Se $x(t)$, definida em $[t_0 - h, t_0 + \delta]$ é solução de (1.1) e se $|x(t)| < H$ neste intervalo, então, $x(t)$ pode ser estendida à direita de $t_0 + \delta$, como solução de (1.1) tomando para a função inicial em $t_0 + \delta$

$$\psi(\theta) = x(t_0 + \delta + \theta) = x_{t_0 + \delta}(\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0.$$

Prova: A afirmação anterior segue diretamente do teorema de existência e unicidade, já citado. Se $f(t, \varphi)$ além de contínua é localmente lipschitziana relativamente a φ , como Teorema 5 nos garante que para qualquer $t_0 \geq 0$ e $\psi \in C_H$ existem $A > 0$ e uma função x definida em $[t_0 - h, t_0 + A)$ que é solução de (1.1) com função inicial ψ em t_0 . Tome o instante inicial s_0 agora dado por $s_0 = t_0 + \delta$, já que x é solução de (1.1) e está definida em $[t_0 - h, t_0 + \delta]$. Desta forma, a solução x pode ser estendida até $t = s_0 + A$. ■

2. Se x , definida em $[t_0 - h, t_0 + \delta)$, $0 < \delta < \infty$, é solução de (1.1) e se, neste intervalo, $|x(t)| \leq \bar{H} < H$, então, podemos estender $x(t)$, como solução de (1.1), a $[t_0 - h, t_0 + \delta]$ e, desta forma, por (1), à direita de $t_0 + \delta$.

A demonstração deste fato segue do critério de Cauchy tomando-se

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds$$

e usando a hipótese 1.

Prova: Consideremos qualquer sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $t_0 \leq t_n, \forall n \in \mathbb{N}$, tal que $t_n \rightarrow t_0 + \delta$, como por exemplo $t_n = t_0 + \delta + \frac{1}{n}$.

Da hipótese 1 temos que $f(s, x_s)$ é limitada, isto é, existe $L > 0$ de modo que $|f(s, x_s)| \leq L$. Para mostrar que $\{x(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, considere $t_m > t_n$, temos:

$$\begin{aligned} |x(t_m) - x(t_n)| &= \left| \int_{t_0}^{t_m} f(s, x_s) ds - \int_{t_0}^{t_n} f(s, x_s) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t_n} f(s, x_s) ds + \int_{t_n}^{t_m} f(s, x_s) ds - \int_{t_0}^{t_n} f(s, x_s) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_n}^{t_m} f(s, x_s) ds \right| \\ &\leq \int_{t_n}^{t_m} |f(s, x_s)| ds \\ &\leq \int_{t_n}^{t_m} L ds \\ &= L|t_m - t_n|. \end{aligned}$$

Note que $L|t_m - t_n| \rightarrow 0$, quando $m, n \rightarrow \infty$. Em outras palavras, podemos dizer que $|x(t_m) - x(t_n)| \rightarrow 0$, quando $m, n \rightarrow \infty$. Assim $\{x(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e $x(t_n) \rightarrow \bar{x}$.

Defina $x(t_0 + \delta) = \bar{x} \in \mathbb{R}$.

Neste ponto temos que x está definida e é contínua em $[t_0 - h, t_0 + \delta]$, agora devemos mostrar que x é solução da equação diferencial em $[t_0 - h, t_0 + \delta]$. Como x é solução de EDFR em $[t_0 - h, t_0 + \delta)$ e é contínua em relação à t , tem-se

$$x(t_n) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_n} f(s, x_s) ds \rightarrow x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \delta} f(s, x_s) ds$$

ou seja,

$$\bar{x} = x(t_0 + \delta).$$

Assim, $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds$ para $t \in [t_0 - h, t_0 + \delta]$ é solução de $\dot{x} = f(t, x_t)$ quando tomamos como função inicial $\psi = x_{t_0 + \delta}$. ■

Observação 7. A hipótese 1 se faz necessária para aplicar o critério de Cauchy porque num espaço de Banach de dimensão infinita, como é o caso de $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, $h > 0$, uma bola fechada não é um conjunto compacto.

Indicaremos por $[t_0 - h, t^+)$, $t_0 < t^+ \leq \infty$, o máximo intervalo aberto à direita ao qual podemos estender $x(t)$ como solução. Quando $t^+ = \infty$ dizemos que $x(t)$ é definida no futuro. Se $x(t)$ é definida e limitada em $[t_0 - h, \infty]$ dizemos que $x(t)$ é limitada no futuro.

3. Seja $x(t)$ solução de (1.1) tal que $|x(t)| \leq \bar{H} < H$ para $t_0 - h \leq t < t^+$. Então, $t^+ = \infty$ e, portanto $x(t)$ é limitada no futuro.

Prova: Suponhamos que t^+ seja finito, então pelo item (1) poderíamos estender x até t^+ como solução de (1.1), isto é, x é solução de (1.1) com $t \in [t_0 - h, t^+]$. Absurdo, pois se x está definido em $[t_0 - h, t^+]$ podemos estendê-la para valores maiores que t^+ , assim $[t_0 - h, t^+]$ não seria o máximo intervalo de x . ■

Em particular se $H = \infty$ e se $x(t)$ é limitada em seu máximo intervalo aberto à direita, então, $t^+ = \infty$. Essa propriedade é uma consequência imediata do item anterior.

4. Em geral não podemos estender $x(t, t_0, \varphi)$ como solução à esquerda de (1.1) em $[t_0 - h, t^+)$, isto é, não pode-se garantir a existência de $\delta > 0$ e de função $x(t)$ definida em $[t_0 - h - \delta, t^+)$, $x(t)$ coincidindo com $x(t, t_0, \varphi)$ em $[t_0 - h, t^+]$ tal que

$$\dot{x} = f(t, x_t) \text{ para } t_0 - \delta \leq t < t^+.$$

Por exemplo, se tomarmos $\varphi \in C$ tal que $\varphi(\theta)$ não tenha derivada à esquerda para $\theta = 0$, então, $x(t, t_0, \varphi)$ não admite prolongamento à esquerda qualquer que seja $t_0 \geq 0$. Mas um prolongamento à esquerda não ocorre, em geral, mesmo que $\varphi(\theta)$ seja diferenciável, veja referência [3].

Agradecimentos: Agradeço à Prof. Dra. Marta Cilene Gadotti, pela orientação, atenção e paciência na supervisão do trabalho e ao PET-Programa de Educação Tutorial pelo apoio financeiro.

Abstract: We will define Retarded Functional Differential Equation (RFDE) and solution. Enunciate Existence and Uniqueness Theorem for RFDE and through an example to show how to find a solution of a RFDE using step-by-step method. Last we will show that above some conditions is possible to extend a solution of a RFDE.

Keywords: RFDE, solution, extension

Referências Bibliográficas

- [1] Onuchic, N. *Equações Diferenciais com Retardamento*, Apostila, ICMC-USP, 1971.
- [2] Estevam, L.A.L. *Tópicos de Equações Diferenciais com Retardamento: uma abordagem segundo o trabalho do prof. Nelson Onuchic*, Dissertação de Mestrado, IGCE-UNESP, 2012.
- [3] Hale, J.K., Verduyn Lunel, S. M. *Introduction to Functional Differential Equations*, Nova Iorque, 1993.

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA–BICMAT

Orientação aos autores

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem \LaTeX , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat, assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.

