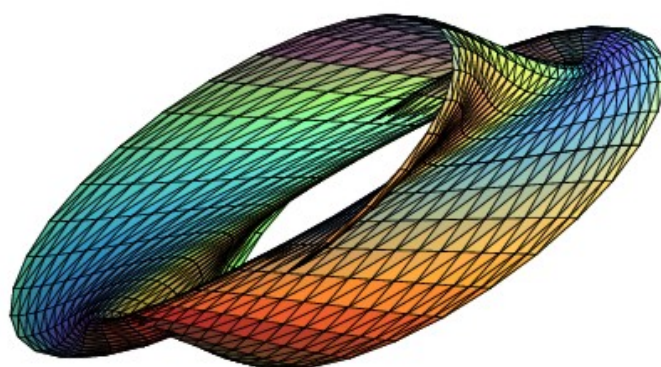

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM
MATEMÁTICA · BICMAT



VOLUME XIV
OUTUBRO DE 2017
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IGCE · RIO CLARO

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM
MATEMÁTICA · BICMAT

Comissão editorial

Carina Alves

Marta Cilene Gadotti

Nativi Viana Pereira Bertolo

Thiago de Melo

Editoração gráfica

Thiago de Melo

Realização

Conselho de Curso de Graduação em Matemática

Departamento de Matemática

IGCE · Unesp Rio Claro

EDITORIAL

O Boletim de Iniciação Científica em Matemática · BICMat é uma publicação que se destina a difundir prioritariamente trabalhos de Iniciação Científica em Matemática que fazem parte de projetos desenvolvidos por alunos do Curso de Graduação em Matemática do IGCE, Unesp Rio Claro. Eventualmente trabalhos de Iniciação Científica realizados em outras instituições poderão também ser publicados neste Boletim.

O BICMat foi criado em 1998 e nessa época foram publicados dois volumes; o primeiro no ano de criação e o segundo em 2000.

Considerando a importância da Iniciação Científica para o graduando, e o sempre crescente número de projetos desta natureza desenvolvidos em nossa instituição, resolvemos reativar a publicação do BICMat em 2006, com ISSN 1980–024X.

Destacamos que a autoria dos trabalhos apresentados no BICMat é dos alunos. O orientador figura apenas como responsável científico.

Este Boletim também está aberto à divulgação de trabalhos que não sejam frutos de projetos de Iniciação Científica, mas que sejam de interesse dos alunos do curso de graduação em Matemática. Estes trabalhos serão selecionados pelos Editores.

Este volume está disponibilizado eletronicamente na página do Departamento de Matemática no endereço

<http://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/>

ou através do código QR



SUMÁRIO

Equações Diferenciais em Circuitos Elétricos

Daniel Borin 5

Soma Direta de Módulos e Isomorfismo

Gabriel de Oliveira Lucena 24

Um Estudo Sobre Problemas e Curvas de Perseguição

Isaac Souza Silva 29

Modelo de Gompertz e Aplicação

Isabella Dafne Oliveira Rodrigues 37

Modelo de Dinâmica Populacional com Estratégias de Retirada

Laís Zorzo Buzo e Luis Renato de Campos Damin e Mateus Spadotto 43

Equações Diferenciais em Circuitos Elétricos

Daniel Borin[†]

Orientador(a): Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Resumo: As equações diferenciais constituem ferramenta importante na modelagem de problemas naturais e sociais. É possível observar que diversos problemas físicos são descritos através deste tipo de equação. Neste trabalho desenvolvemos o estudo do circuito RLC em série e seus derivados (Circuitos RC , Circuitos LC , etc...), realizando a modelagem matemática do problema e resolvendo através de métodos analíticos de equações diferenciais lineares.

Palavras-chave: Equações Diferenciais, circuitos elétricos, modelagem matemática

1 Elementos de Circuito

1.1 Resistor

Um resistor (ôhmico) é um elemento do circuito onde ocorre a conversão de energia elétrica em energia térmica, dada pelo efeito Joule. Este componente obedece a lei de ohm, quando atravessado por uma corrente i , apresenta uma queda de potencial através dos seus extremos dada pela equação

$$V = Ri.$$

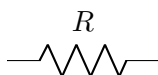


FIGURA 1: Resistor

1.2 Capacitor

Um capacitor é um elemento composto por dois condutores isolados por um dielétrico, um com carga q , e outro com carga $-q$. A queda de potencial entre os condutores é dada por

$$V = \frac{q}{C}.$$

onde C é chamada de capacitância do capacitor e seu valor depende da geometria das placas.

[†]Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (processo n° 2017/03686-1)

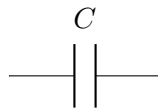


FIGURA 2: Capacitor

1.3 Indutor

O indutor é um dispositivo que pode ser usado para produzir um campo magnético com o valor desejado em um região do espaço. Se uma corrente I atravessa as N espiras de um indutor, um fluxo magnético entrelaça essa espiras. A queda de potencial através dos extremos do indutor, tomada no sentido da corrente é dado pela equação

$$V = L \frac{di}{dt}.$$

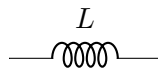


FIGURA 3: Indutor

1.4 Gerador

Um gerador é uma fonte de força eletromotriz que realiza um trabalho sobre as cargas elétricas para manter uma diferença de potencial entre os terminais. Temos dois tipos de geradores, o de corrente alternada (CA) e o de corrente contínua (CC), no primeiro a força eletromotriz varia senoidalmente com o tempo, enquanto a segunda como o nome já diz, é contínua. Ao contrário do resistor, capacitor e do indutor, um gerador é um elemento ativo de um circuito, que fornece energia, simbolizando isto com um sinal negativo. Portanto a “queda” de potencial é

$$V = -\varepsilon.$$

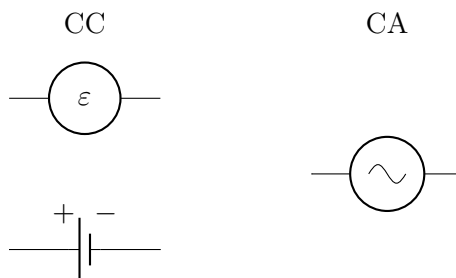


FIGURA 4: Gerador

2 Modelagem Matemática

A modelagem matemática de circuitos consiste basicamente na aplicação de uma lei bastante importante se tratando de circuitos elétricos, denominada *Regra das Malhas de Kirchhoff*.

Teorema 1.1 (Regra das Malhas de Kirchhoff). *A Soma algébrica de todas as quedas de tensão encontradas ao percorrer uma malha fechada é nula,*

$$\sum V = 0.$$

Prova: O trabalho elementar dW realizado sobre uma partícula por uma força durante um deslocamento $d\vec{s}$ é dado por

$$dW = \vec{F}d\vec{s}.$$

Para um circuito, $\vec{F} = q_0\vec{E}$, então, obtemos

$$dW = q_0\vec{E}d\vec{s}.$$

Para determinar o trabalho total W do ponto i para o ponto f , somamos, por integração, os trabalhos elementares realizados sobre a carga quando ela sofre todos os deslocamentos elementares, portanto obtemos

$$W = q_0 \int_i^f \vec{E}d\vec{s}.$$

Substituindo W por $W = -VQ$, onde V é a diferença de potencial, obtemos

$$V = - \int_i^f \vec{E}d\vec{s}. \quad (2.1)$$

A equação (2.1) é chamada de equação do potencial a partir do campo elétrico. Agora consideremos o circuito da figura abaixo, onde os retângulos brancos representam qualquer elemento passivo (resistor, capacitor ou indutor).

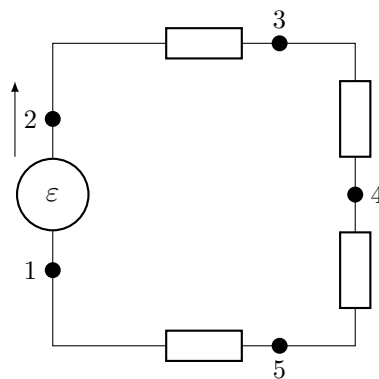


FIGURA 5: Circuito

Aplicando a equação do potencial a partir do campo elétrico nos pontos 1 e 2 da Figura 5, obtemos, por exemplo

$$V_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = - \int_1^2 dV = V_1 - V_2 = -\varepsilon.$$

Agora, como o potencial não depende do caminho, mas sim do seu deslocamento, vamos aplicar (2.1), mas desta vez vamos percorrer a malha toda até chegarmos novamente no ponto em que partimos, portanto

$$V_{\text{malha}} = \sum V = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} + \int_2^3 \vec{E} d\vec{s} + \int_3^4 \vec{E} d\vec{s} + \int_4^5 \vec{E} d\vec{s} + \int_5^1 \vec{E} d\vec{s} = \int_1^1 \vec{E} d\vec{s} = 0.$$

Logo, $\sum V = 0$. □

3 Circuito RC

Considere o circuito da Figura 6, onde o capacitor está totalmente descarregado.

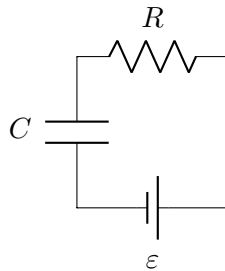


FIGURA 6: Circuito RC

Fechando a chave S , e aplicando a Regra das Malhas de Kirchhoff, obtemos

$$iR + \frac{q}{C} = \varepsilon. \quad (3.1)$$

Como $i = \frac{dq}{dt}$ e dividindo (3.1) por R , obtemos então a equação diferencial

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (3.2)$$

Como (3.2) é uma EDO (Equação Diferencial Ordinária) linear de primeira ordem, resolveremos ela através do método do fator integrante, que consiste em multiplicar a equação por um fator para que se possa utilizar a regra do produto da diferenciação. Esse fator é

$$\mu = e^{\int \frac{dt}{RC}} = e^{\frac{t}{RC}}.$$

Multiplicando μ em ambos os lados de (3.2), obtemos

$$\mu \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} \mu = \frac{\varepsilon}{R} \mu \implies e^{\frac{t}{RC}} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} e^{\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{t}{RC}}.$$

Aplicando a regra do produto da diferenciação,

$$\frac{d}{dt}(qe^{\frac{t}{RC}}) = \frac{\varepsilon}{R}e^{\frac{t}{RC}}.$$

Integrando ambos os lados em relação a t ,

$$\int \frac{d}{dt}(qe^{\frac{t}{RC}}) = \int \frac{\varepsilon}{R}e^{\frac{t}{RC}} \implies qe^{\frac{t}{RC}} = C\varepsilon(1 + ke^{-\frac{t}{RC}}).$$

Para determinamos k , utilizamos a condição inicial de que no instante $t = 0$, $q = 0$,

$$0 = C\varepsilon(1 + ke^{-\frac{0}{RC}}) = C\varepsilon + kC\varepsilon \implies k = -1.$$

Portanto a solução do Problema de Valor Inicial é

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Analisando a solução, vemos que quando $t = 0$, o termo $e^{-\frac{t}{RC}}$ é igual a 1, sendo assim, $q = 0$. Quando t tende ao infinito, o termo $e^{-\frac{t}{RC}}$ tende a zero e $q = C\varepsilon$.

Agora, analisaremos a corrente, como $\frac{dq}{dt} = i$, então

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Note que quando $t = 0$ o valor da corrente é $\frac{\varepsilon}{R}$ e conforme o tempo, com t tendendo ao infinito, o termo $e^{-\frac{t}{RC}}$ tende a zero, assim o valor da corrente vai para zero.

A Figura 7 representa o gráfico de $i(t)$ em função de t .

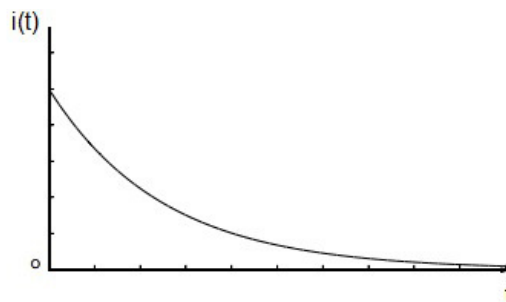
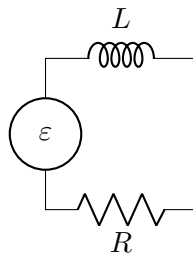


FIGURA 7: Corrente num circuito RC

Esse circuito descreve o processo de carga de um capacitor. Quando a chave S do circuito é fechada cargas começam a se mover no circuito e uma corrente é gerada. Essa corrente acumula q cada vez maior na placas do capacitor e estabelece uma diferença de potencial $V_c = (q/C)$ entre as placas do capacitor. Quando esta diferença de potencial é igual a da fonte, a corrente deixa de circular, e o capacitor atingiu sua carga final, ou de equilíbrio, equivalente a $C\varepsilon$.

FIGURA 8: Circuito RL com força eletromotriz constante

4 Circuito RL

4.1 Circuito RL com força eletromotriz constante

Considere o circuito da Figura 8.

A corrente nesse circuito tem comportamento análogo a carga de um circuito RC em série inicialmente descarregado.

Quando o circuito é ligado, a corrente no resistor começaria a aumentar. De acordo com a lei de Lenz a força eletromotriz auto induzida ε_L no indutor se opõe ao aumento de corrente. Assim, a corrente no circuito responde a diferença entre duas forças eletromotrizes, uma contante ε , e uma variável ε_L .

Assim aplicando a Regra das Malhas de Kirchhoff, obtemos

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \varepsilon.$$

A EDO que descreve o movimento da corrente nesse circuito é uma equação diferencial da primeira ordem com variáveis separáveis. Podemos então separar as variáveis e obter

$$\frac{L}{\varepsilon - Ri} \frac{di}{dt} = 1$$

a partir do qual, integrando em relação a t , obtemos

$$\int \frac{L}{\varepsilon - Ri} \frac{di}{dt} dt = \int dt \implies -\frac{L}{R} \log(\varepsilon - Ri) = t + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$\log(\varepsilon - Ri) = -\frac{R}{L}(t + c)$$

do qual

$$\varepsilon - Ri = ke^{-\frac{R}{L}t}$$

com $k = e^{-\frac{R}{L}c}$. Desta igualdade é obtido

$$i(t) = \frac{\varepsilon - ke^{-\frac{R}{L}t}}{R}.$$

Para determinarmos k , utilizaremos da condição inicial de que quando $t = 0$, $i = 0$, assim

$$0 = \frac{\varepsilon - ke^{-\frac{R}{L}0}}{R} \implies k = \varepsilon.$$

Portanto, a solução do Problema de Valor Inicial é

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Analisando a solução, vemos que quando $t = 0$, ou seja, no instante em que a chave é fechada, a exponencial se torna $e^{-0} = 1$. Então no instante inicial a corrente é nula, e após um longo tempo que a chave foi fechada, ou seja, para $t \rightarrow \infty$, a exponencial se torna $e^{-\infty} = 0$, logo, a corrente tende para o valor final $\frac{\varepsilon}{R}$.

4.2 Circuito RL sem força eletromotriz

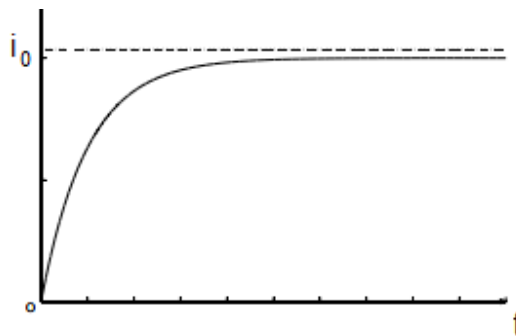


FIGURA 9: Corrente num circuito RL com força eletromotriz constante

Depois que corrente atingiu seu valor final $\frac{\varepsilon}{R}$, retiramos a fonte de força eletromotriz constante fechando o circuito diretamente em R e em L , como na Figura 10.

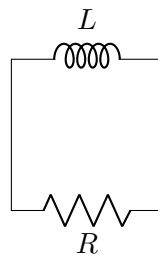


FIGURA 10: Circuito RL sem força eletromotriz

Mesmo retirando a fonte, a presença do indutor L gera uma força eletromotriz autoinduzida que fará circular uma corrente pelo circuito, quando essa força acabar a corrente no resistor irá para zero. Aplicando a Regra das Malhas de Kirchhoff, obtemos

$$L \frac{di}{dt} + Ri,$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem com variáveis separáveis, cuja solução é

$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Para determinarmos c , utilizaremos da condição inicial $i(0) = i_0 = \frac{\varepsilon}{R}$,

$$i_0 = ce^0 = c.$$

Portanto nossa solução de Problema de Valor Inicial é

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = i_0e^{-\frac{R}{L}t}.$$

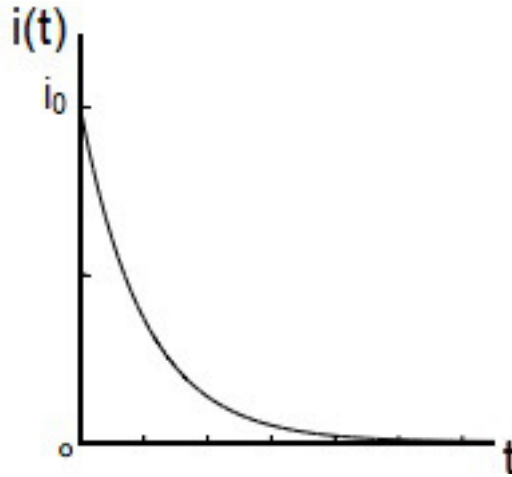


FIGURA 11: Corrente num circuito RL sem força eletromotriz

4.3 Circuito RL com força eletromotriz alternada

Considerando agora o circuito RL da Figura 12, só que desta vez a força eletromotriz fornecerá trabalho de maneira alternadamente.

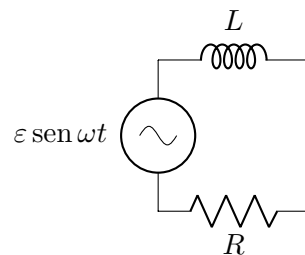


FIGURA 12: Circuito RL com força eletromotriz alternada

Aplicando a Regra das Malhas de Kirchhoff, obtemos

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \varepsilon \text{ sen } \omega t,$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem, resolvendo pelo método dos fatores integrantes obtemos

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{\varepsilon}{L} \int \text{sen } \omega t e^{\frac{R}{L}t} dt + c_1 \right)$$

Resolvendo a integral duas vezes por partes, obtemos

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{\omega^2 L^2 + R^2} (R \operatorname{sen} \omega t - \omega L \cos \omega t + c_1 e^{-\frac{R}{L}t}). \quad (4.1)$$

Aplicando a condição inicial $i(0) = 0$ para encontrarmos c_1 ,

$$0 = \frac{\varepsilon}{\omega^2 L^2 + R^2} (-\omega L) + c_1 \implies c_1 = \frac{\varepsilon}{\omega^2 L^2 + R^2} (\omega L).$$

Logo podemos reescrever (4.1),

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{\omega^2 L^2 + R^2} (R \operatorname{sen} \omega t - \omega L \cos \omega t + \omega L e^{-\frac{R}{L}t}). \quad (4.2)$$

Como $Z = \sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}$ é uma grandeza física denominada **Impedância**, substituindo em (4.2),

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{Z} \left(\frac{R}{Z} \operatorname{sen} \omega t - \frac{\omega L}{Z} \cos \omega t \right) + \frac{\omega L \varepsilon}{Z^2} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (4.3)$$

Agora, definindo

$$\frac{R}{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \phi, \quad \frac{\omega L}{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sen} \phi, \quad (4.4)$$

justificada pela identidade

$$\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi = \frac{R^2}{Z^2} + \frac{\omega^2 L^2}{Z^2} = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{Z^2} = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = 1,$$

substituindo então (4.4) em (4.3) obtemos

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{Z} (\cos \phi \operatorname{sen} \omega t - \operatorname{sen} \phi \cos \omega t) + \frac{\omega L \varepsilon}{Z^2} e^{-\frac{R}{L}t},$$

ou seja,

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{Z} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) + \frac{\omega L \varepsilon}{Z^2} e^{-\frac{R}{L}t},$$

onde ϕ é chamado de ângulo de fase entre a tensão e a corrente, e está no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ pois o valor do $\operatorname{sen} \phi$, $\cos \phi$ da equação (4.4) é sempre positivo.

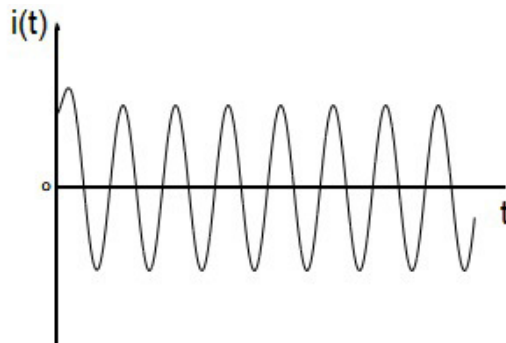
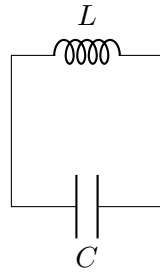


FIGURA 13: Corrente num circuito RL com força eletromotriz alternada

FIGURA 14: Circuito LC

5 Circuito LC

Consideremos agora o circuito idealizado da Figura 14, onde o capacitor está carregado, e como não há resistência no circuito, não há dissipação e a energia inicialmente armazenada no circuito se conserva.

Aplicando a Regra das Malhas de Kirchhoff, obtemos

$$L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Como

$$i = \frac{dq}{dt},$$

e dividindo toda a expressão por L , então

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0 \tag{5.1}$$

é uma equação diferencial de segunda ordem linear homogênea com coeficientes constantes, e para resolvê-la, iremos propor uma solução candidata

$$q(t) = e^{rt}$$

onde r é uma constante a determinar. Substituindo então em (5.1)

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^{rt}) + \frac{e^{rt}}{LC} = 0 \implies r^2 e^{rt} + \frac{e^{rt}}{LC} = 0 \implies e^{rt} \left(r^2 + \frac{1}{LC} \right) = 0.$$

Como a exponencial nunca se anula, então o polinômio tem que ser igual a zero,

$$r^2 + \frac{1}{LC} = 0. \tag{5.2}$$

A equação (5.2) é chamada de *equação característica* ou *auxiliar* de (5.1).

Definição 1.2. Considere a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0. \tag{5.3}$$

Sejam r_1 e r_2 as raízes do polinômio característico correspondente,

$$ar^2 + br + c = 0.$$

- Se r_1 e r_2 são reais e distintos, então a solução geral da equação diferencial (5.3) é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

- Se r_1 e r_2 são complexos conjugados $\alpha \pm i\beta$, então a solução geral é

$$y = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

- Se $r_1 = r_2$, então a solução geral é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}.$$

Resolvendo então o polinômio característico (5.2),

$$r^2 + \frac{1}{LC} = 0 \implies r = \pm i \frac{1}{\sqrt{LC}} \implies r = \pm i\omega,$$

onde $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Como as raízes são complexas conjugadas, pela Definição 1.2 a solução geral é

$$q(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \quad (5.4)$$

Derivando (5.4) com respeito a t , obtemos

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = c_1 \omega \sin \omega t - c_2 \omega \cos \omega t. \quad (5.5)$$

Utilizando a condição inicial $q(0) = q_0$, $i(0) = 0$, obtém-se de (5.4) e (5.5)

$$\begin{cases} q_0 = c_1, \\ 0 = -c_2 \omega, \end{cases}$$

ou seja,

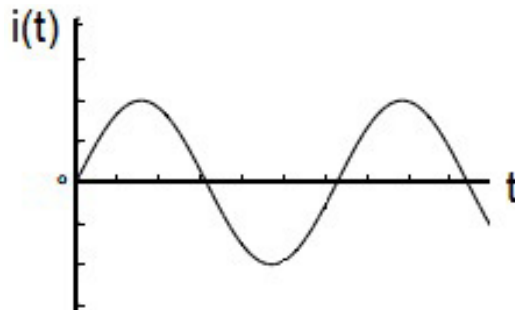
$$\begin{cases} c_1 = q_0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

Portanto, a corrente no circuito LC será

$$i(t) = q_0 \omega \sin \omega t$$

com período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

FIGURA 15: Corrente num Circuito LC

6 Circuito RLC

6.1 Circuito RLC sem força eletromotriz

Vamos discutir apenas o caso de circuitos RLC série. Como agora temos uma resistência R , a energia eletromagnética do circuito (a soma da energia elétrica e da energia magnética) não é mais constante, pois parte da energia é dissipada como energia térmica na resistência. Por conta dessa perda de energia, as oscilações de carga, corrente diminuem continuamente de amplitude e dizemos que as oscilações são amortecidas.

Aplicando a Regra das Malhas de Kirchhoff no circuito da Figura 16, obtemos

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0, \quad (6.1)$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes.

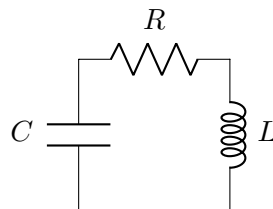
A equação característica associada de (6.1) é

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0, \quad (6.2)$$

cujo discriminante Δ é

$$\Delta = R^2 - 4 \frac{L}{C}.$$

Logo, temos três possibilidades para a solução, que dependerá do valor de Δ .

FIGURA 16: Circuito RLC sem força eletromotriz

$$6.1.1 \quad \Delta > 0 \implies R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Neste caso, a equação (6.2) admite duas raízes reais, ambas negativas, que indicamos com $-r_1$ e $-r_2$ ($r_1, r_2 > 0$). Logo pela Definição 1.2 a solução geral de (6.1) é

$$q(t) = c_1 e^{-r_1 t} + c_2 e^{-r_2 t}$$

da qual

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = r_1 c_1 e^{-r_1 t} + r_2 c_2 e^{-r_2 t}.$$

Utilizando as condições iniciais

$$q(0) = q_0, \quad i(0) = 0,$$

para determinar as constante c_1 e c_2 , temos assim

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = q_0, \\ r_1 c_1 + r_2 c_2 = 0, \end{cases}$$

da qual

$$\begin{cases} c_1 = \frac{r_2 q_0}{r_1 - r_2}, \\ c_2 = \frac{r_1 q_0}{r_1 - r_2}. \end{cases}$$

A intensidade de corrente $i(t)$ é portanto

$$q(t) = \frac{r_2 q_0}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t} + \frac{r_1 q_0}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t} \implies \frac{r_1 r_2 q_0}{r_1 - r_2} (e^{-r_2 t} - e^{-r_1 t}).$$

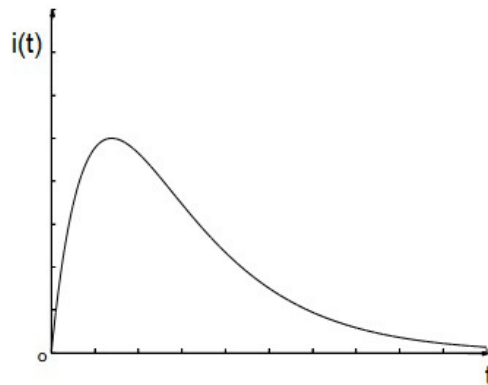


FIGURA 17: Corrente num circuito RLC sem força eletromotriz com $\Delta > 0$

$$6.1.2 \quad \Delta < 0 \implies R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Como $\Delta < 0$, a equação (6.2) admite duas raízes que são complexos conjugados

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{i\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}.$$

Chamemos por comodidade,

$$\frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} = \omega. \quad (6.3)$$

Pela Definição 1.2 a solução geral de (6.1) é

$$q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t).$$

Logo, a expressão da intensidade da corrente $i(t)$ é

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) - e^{-\frac{R}{2L}t}(c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t). \quad (6.4)$$

Utilizando as condições iniciais,

$$q(0) = q_0, \quad i(0) = 0,$$

para determinar c_1 e c_2 , temos

$$\begin{cases} q_0 = c_1, \\ 0 = \frac{R}{2L}c_1 - c_2\omega, \end{cases}$$

da qual, temos

$$\begin{cases} c_1 = q_0, \\ c_2 = \frac{Rq_0}{2\omega L}. \end{cases}$$

Substituindo os valores de c_1 e c_2 em (6.3), temos

$$i(t) = q_0 \frac{R^2 + 4L^2\omega^2}{4\omega L^2} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t, \quad (6.5)$$

obtendo ω^2 de (6.3) e substituindo no fator $R^2 + 4L^2\omega^2$ de (6.5) conseguimos finalmente

$$i(t) = \frac{q_0}{LC\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t. \quad (6.6)$$

Analisando (6.6), podemos ver que quando a resistência é suficientemente pequena ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$), a corrente de descarga do capacitor é uma corrente alternada (por conta do fator seno na expressão), que oscila entre as curvas exponenciais $\pm e^{-\frac{R}{2L}t}$.

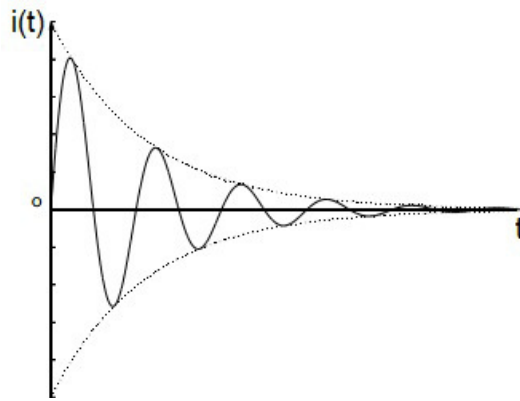
6.1.3 $\Delta = 0 \implies R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Quando temos $\Delta = 0$, a equação (6.2) admite duas raízes repetidas, pela Definição 1.2 a solução geral de (6.1) é

$$q(t)(c_1 + tc_2)e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Logo, a intensidade de corrente é

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \left(c_1 \frac{R}{2L} - c_2 + c_2 \frac{R}{2L}t \right) e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

FIGURA 18: Corrente num circuito RLC sem força eletromotriz com $\Delta < 0$

Utilizando as condições iniciais,

$$q(0) = q_0, \quad i(0) = 0,$$

para determinar c_1 e c_2 , temos

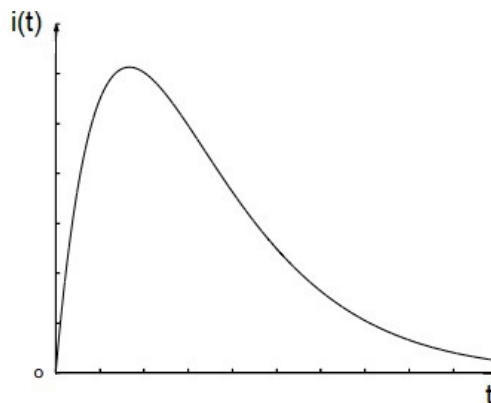
$$\begin{cases} q_0 = c_1, \\ 0 = c_1 \frac{R}{2L} - c_2, \end{cases}$$

da qual temos

$$\begin{cases} c_1 = q_0, \\ c_2 = \frac{Rq_0}{2L}. \end{cases}$$

Substituindo os valores de c_1 e c_2 em (6.3), temos portanto a equação da intensidade da corrente para $\Delta = 0$,

$$i(t) = q_0 \frac{R^2}{4L^4} t e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

FIGURA 19: Corrente num circuito RLC sem força eletromotriz com $\Delta = 0$

6.2 Circuito RLC com força eletromotriz alternada

Considere agora um circuito RLC , mas acrescentado de uma força eletromotriz alternada, conforme a Figura 20.

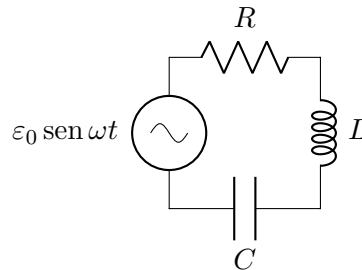


FIGURA 20: Circuito RLC com força eletromotriz alternada

Aplicando a Regra das Malhas de Kirchhoff, obtemos

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon_0 \sin \omega t \quad (6.7)$$

com condições iniciais $q(0) = q_0$ e $i(0) = 0$. Derivando (6.7), obtemos uma equação diferencial de segunda ordem linear não homogênea de $i(t)$,

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \varepsilon_0 \omega \cos \omega t. \quad (6.8)$$

Para resolver a equação (6.8) precisamos enunciar os seguintes resultados.

Definição 1.3. Seja,

$$L[y] = a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y = f(t), \quad (6.9)$$

onde $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ e $f(t)$ são funções contínuas dadas em um intervalo aberto I . A equação

$$L[y] = a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y = 0$$

é chamada de **equação homogênea associada à (6.9)**.

Teorema 1.4. *Seja $y_c = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ solução da homogênea associada à (6.9), onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções linearmente independentes e seja y_p qualquer solução particular da equação não-homogênea (6.8). Então, toda solução $y(t)$ de (6.9) tem a forma*

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t),$$

ou seja,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t).$$

Prova: Seja $y(x)$ solução geral e $y_p(x)$ solução particular de (6.9). Subtraindo as duas equações temos

$$\begin{aligned} L[y] - L[y_p] &= a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y - a(t) \frac{d^2 y_p}{dt^2} + b(t) \frac{dy_p}{dt} + c(t)y_p \\ &= a(t) \frac{d^2 (y - y_p)}{dt^2} + b(t) \frac{d(y - y_p)}{dt} + c(t)(y - y_p) = 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Podemos perceber que $y - y_p$ é a solução da homogênea associada

$$y_c = y - y_p.$$

Portanto explicitando y obtemos a forma da solução geral

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t). \quad \square$$

Voltando agora para o caso do circuito RLC com força eletromotriz alternada, note que a solução da equação homogênea associada à (6.8) já foi determinada em 6.1, no caso do circuito RLC sem força eletromotriz, ou melhor, os seus três casos. Vamos então focar em encontrar uma solução particular de (6.8), faremos isso através de um método chamado *tentativa criteriosa ou dos coeficientes indeterminados ou a determinar*, onde supomos que a solução particular tenha a forma de $f(t)$, e depois determinamos os coeficientes específicos para os quais i_p seja solução particular para (6.8).

Tentamos então

$$i_p = A \cos \omega t + B \sen \omega t,$$

onde suas derivas são

$$\begin{aligned} \frac{di_p}{dt} &= -A\omega \cos \omega t + B\omega \sen \omega t, \\ \frac{d^2 i_p}{dt^2} &= A \cos \omega t + B \sen \omega t. \end{aligned}$$

Substituindo esses valores em (6.8),

$$L(A \cos \omega t + B \sen \omega t) - R(A\omega \cos \omega t + B\omega \sen \omega t) + \frac{1}{C}(A \cos \omega t + B \sen \omega t) = \varepsilon_0 \cos \omega t.$$

Agrupando os termos do cosseno e igualando com $\varepsilon_0 \cos \omega$ da direita, e igualando os termos do seno a zero porque não há nenhum termo do seno na direita, obtemos

$$\begin{cases} L\omega^2(-A) + R\omega B + \frac{A}{C} = \varepsilon_0 \omega, \\ L\omega^2(-B) + R\omega(-A) + \frac{B}{C} = 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Para resolver esse sistema de A e B , introduziremos duas grandezas físicas, a **reatância indutiva** $X_L = \omega L$ e a **reatância capacitiva** $X_C = \frac{1}{\omega C}$, denominando a combinação delas de

$$S = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (6.12)$$

Dividindo as 2 equações de (6.11) por ω , ordenando-lhes, e substituindo S temos

$$\begin{cases} -SA + Rb = \varepsilon_0, \\ -RA - SB = 0. \end{cases}$$

Agora eliminamos B multiplicando a primeira equação por S e a segunda por R e adicionando-as. Então nós eliminamos A multiplicando a primeira equação por R e a segunda por $-S$ e somando-as. Isto nos dá

$$\begin{cases} -(S^2 + R^2)A = \varepsilon_0 S, \\ (R^2 + S^2)B = \varepsilon_0 R, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} A = -\frac{\varepsilon_0 S}{S^2 + R^2}, \\ B = \frac{\varepsilon_0 R}{R^2 + S^2}. \end{cases}$$

Logo, a solução particular i_p de (6.8) é

$$i_p(t) = -\frac{\varepsilon_0 S}{S^2 + R^2} \cos \omega t + \frac{\varepsilon_0 R}{R^2 + S^2} \sin \omega t.$$

Podemos escrever i_p para que fique “fisicamente visível”, ou seja,

$$i_p(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi), \quad (6.13)$$

onde I_0 é a amplitude da corrente

$$I_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + S^2}}$$

e ϕ é o atraso da fase da corrente em relação à da força eletromotriz, dada por

$$\tan \phi = -\frac{A}{B} = \frac{S}{R}.$$

A quantidade $Z = \sqrt{R^2 + S^2}$ é chamada de **impedância** do circuito.

Agradecimentos: Agradeço a Deus primeiramente, por todas as oportunidades que ele me proporcionou até aqui. Agradeço aos meus pais, Antonio Valdeci Borin e Eva Aparecida Ribeiro Borin, pois sem eles, não teria chegado até onde cheguei e muito menos teria escrito este artigo, vocês são os meus alicerces, que me sustentam em todas as dificuldades da vida, não há palavras para descrever o quanto sou grato a vocês. Agradeço a Franciele Horácio de Souza, que sempre me apoiou e acompanhou de perto o meu esforço, estando sempre ao meu lado. Agradeço à Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti por suas sábias palavras de incentivo, por sua paciência, apoio durante a realização do projeto; e além de ser apenas uma orientadora, tornou-se uma companheira, e sempre acreditou em mim e no meu potencial apesar de todas as diversidades. Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, por seu apoio financeiro para o desenvolvimento de minha pesquisa. Dedico este trabalho a todos os que, de maneira direta ou indireta, cooperaram para que eu chegasse até aqui.

Abstract: The differential equations constitute an important tool in modeling of natural and social problems. It is possible to observe that several physical problems are described through this type of equation. In this work we have developed the study of the series RLC-circuit and its derivatives (RC-circuit, LC-circuit, etc. . .) performing the mathematical modeling of the problem and solving through analytical methods of linear differential equations.

Keywords: Differential equations, electric circuits, Mathematical modeling

Referências Bibliográficas

- [1] Piana, A. e Ziggio, A. *Alcune applicazioni delle equazioni differenziali ordinarie alla teoria dei circuiti elettrici.*
- [2] Nussenzveig, H.M., *Curso de Física Básica 3 - Eletromagnetismo*, Edgard Blücher, São Paulo, 1996.
- [3] Halliday, D. e Resnick, R., *Fundamentals of Physics*, vol.2, 9th edition, John Wiley & Sons, 2011.
- [4] Braun, M., *Differential equations and their applications*, Springe, New York, 1941.
- [5] Boyce, W.E. e DiPrima R.C. *Elementary differential equations and boundary value problems*, 9th edition, John Wiley & Sons, 2009.
- [6] Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*, 9th edition, John Wiley & Sons, 2006.
- [7] Russo, A., Trimarco, V., *Equazione differenziali*, sistemi editoriali, Napoli, 2005.
- [8] Young, H.D. e Freedman, R.A. *Sears and Zemansky's university physics with modern physics*, 13th edition, Pearson, São Francisco, 2011.
- [9] Vitali, E., *Lezioni introduttive sulle equazioni differenziali ordinarie*, Pavia, 2014.

Soma Direta de Módulos e Isomorfismo

Gabriel de Oliveira Lucena[†]

Orientador(a): Thiago de Melo

Resumo: Os espaços vetoriais, muito importantes em um curso de graduação em Matemática e estudados logo no início do curso, são um caso particular de uma estrutura algébrica conhecida como Módulo sobre um anel. Outros objetos importantes na Matemática, vistos muito antes da graduação, são o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais e o conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros. Neste trabalho, veremos como esses conjuntos (ou variantes destes) possuem estrutura de módulo e utilizaremos o Teorema Fundamental da Aritmética para mostrar que o módulo \mathbb{Q}_+ dos racionais positivos pode ser visto como uma soma direta de módulos.

Palavras-chave: isomorfismo; módulos; soma direta

1 Módulos

Sejam X um grupo abeliano, A um anel comutativo com identidade 1 e $\mu : A \times X \rightarrow X$ uma função, denotada por $\mu(\alpha, x) = \alpha x$, $\alpha \in A$, $x \in X$. Se para todos $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in A$ valem

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (1.1)$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad (1.2)$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad (1.3)$$

$$1x = x, \quad (1.4)$$

então dizemos que (X, μ) é um módulo sobre A ou um A -módulo. Por conveniência, é comum denotarmos (X, μ) apenas por X quando estiver claro qual é a função μ .

Um exemplo imediato é tomar A como o anel \mathbb{Z} dos números inteiros e X como um grupo abeliano qualquer. Nesse caso, utilizaremos a função $\mu : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ definida recursivamente da seguinte forma:

$$\mu(0, x) = 0, \text{ para todo } x \in X,$$

$$\mu(n, x) = \mu(n - 1, x), \text{ para todo } x \in X, n \in \mathbb{Z}, n > 0,$$

$$\mu(n, x) = -\mu(-n, x), \text{ para todo } x \in X, n \in \mathbb{Z}, n < 0.$$

Essa função é normalmente enunciada e interpretada como “ x operado com x , n vezes”, e prova-se através do Princípio da Indução Finita que, com μ definida dessa forma, X é um módulo

[†]Bolsista FAPESP, processo 2016/25436-4

sobre \mathbb{Z} . Com isso, diversos exemplos podem ser citados com alguns grupos importantes na Matemática.

Exemplos

1. Tomando X como o grupo \mathbb{Z} dos números inteiros com a operação de soma, temos que \mathbb{Z} é um módulo sobre \mathbb{Z} e μ torna-se a multiplicação usual dos números inteiros.
2. Tomando X como o grupo \mathbb{R} dos números reais com a operação de soma, temos que \mathbb{R} é um módulo sobre \mathbb{Z} e μ torna-se a multiplicação usual de um número inteiro por um número real.
3. Tomando X como o grupo \mathbb{Q}^* dos números racionais não-nulos com a operação de multiplicação, temos que \mathbb{Q}^* é um módulo sobre \mathbb{Z} e μ torna-se a operação de potenciação.
4. Tomando X como o grupo \mathbb{Q}_+ dos números racionais positivos com a operação de multiplicação, temos que \mathbb{Q}_+ é um módulo sobre \mathbb{Z} e μ torna-se a operação de potenciação.

1.1 Homomorfismos de módulos

Assim como para grupos e anéis, podemos definir homomorfismo para módulos. Dados X e Y módulos sobre o anel A , dizemos que uma função $h : X \rightarrow Y$ é um **homomorfismo de módulos** se, para todos $u, v \in X$, $\alpha \in A$, temos

$$\begin{aligned} h(u + v) &= h(u) + h(v), \\ h(\alpha u) &= \alpha h(u). \end{aligned}$$

Novamente análogo ao caso de grupos e anéis, dizemos que um homomorfismo h é isomorfismo se h é bijetora e dizemos que dois A -módulos X e Y são isomorfos quando existe $h : X \rightarrow Y$ isomorfismo de módulos. Em geral, quando dois módulos são isomorfos, interpretamos que eles têm a mesma estrutura, ou que são o mesmo módulo, exceto por como escrevemos cada elemento.

1.2 Produto direto e soma direta de módulos

Outra ideia importante no estudo de módulos é o produto direto. Em geral, dados X e Y dois conjuntos, entendemos o produto cartesiano $X \times Y$ como o conjunto dos pares ordenados (x, y) com $x \in X$ e $y \in Y$. Podemos, porém, entender um par ordenado como uma função $f : \{1, 2\} \rightarrow X \cup Y$ onde $f(1) \in X$ e $f(2) \in Y$. Desse modo, dada uma família de conjuntos $F = \{X_i\}_{i \in M}$ indexada em um conjunto M qualquer, definimos o produto cartesiano da família F como o conjunto P das funções $f : M \rightarrow \cup_{i \in M} X_i$ tais que $f(i) \in X_i$ para cada $i \in M$.

1.2.1 Produto direto

Se X_i é um A -módulo para cada $i \in M$, definimos $+$: $P \times P \rightarrow P$ por $+(f, g) = f + g$ e μ : $A \times P \rightarrow P$ por $\mu(\alpha, f) = \alpha f$, onde, para todo $i \in M$, $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$ e $(\alpha f)(i) = \alpha f(i)$. Prova-se facilmente, a partir do fato de que cada X_i é módulo sobre A , que P é grupo abeliano com a operação $+$, onde o elemento neutro 0 é dado por $0(i) = 0$ e o elemento oposto de cada $f \in P$ é $-f$, dado por $(-f)(i) = -f(i)$. Além disso, pode-se mostrar também que P é módulo sobre A com a operação μ .

O módulo P é chamado **produto direto** da família F de módulos sobre A .

1.2.2 Soma direta

Seja S o conjunto dos elementos $f \in P$ tais que o conjunto $\{i \in M \mid f(i) \neq 0\}$ é finito. Então, dados $f, g \in S$ e $\alpha \in A$, temos que $\{i \in M \mid (f + g)(i) \neq 0\} \subset \{i \in M \mid f(i) \neq 0 \text{ ou } g(i) \neq 0\}$. Como o conjunto $\{i \in M \mid f(i) \neq 0 \text{ ou } g(i) \neq 0\} = \{i \in M \mid f(i) \neq 0\} \cup \{i \in M \mid g(i) \neq 0\}$ é finito, temos que $\{i \in M \mid (f + g)(i) \neq 0\}$ também é finito. Portanto, $f + g \in S$. Além disso, $\{i \in M \mid (\alpha f)(i) \neq 0\} \subset \{i \in M \mid f(i) \neq 0\}$ e, analogamente, concluímos que $\alpha f \in S$.

Como $0 \in S$ e, para cada $f \in S$, $-f = (-1)f \in S$, temos que S é subgrupo de P . Além disso, como $\alpha f \in S$ para todo $\alpha \in A$, podemos definir a função $\mu' : A \times S \rightarrow S$ dada por $\mu'(\alpha, f) = \mu(\alpha, f)$ tal que μ' obedece a todas as propriedades de operação de módulo como em (1.1)–(1.4) e, com isso, (S, μ') é um módulo sobre A .

O módulo S é chamado **soma direta** da família F de módulos sobre A .

2 \mathbb{Q}_+ como soma direta

Queremos provar agora que o módulo \mathbb{Q}_+ do exemplo (4) é isomorfo a uma soma direta. Para isso, faremos uso do seguinte:

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo inteiro positivo $n > 1$ pode ser representado como um produto de potências de números primos $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ são inteiros positivos. Tal representação é única se exigirmos $p_1 < \cdots < p_t$.*

Os elementos de \mathbb{Q}_+ são da forma a/b , onde a e b são números naturais não-nulos. O Teorema Fundamental da Aritmética nos garante que, se $a \neq 1$, existem q_1, \dots, q_n primos e β_1, \dots, β_n inteiros positivos tais que $a = q_1^{\beta_1} \cdots q_n^{\beta_n}$. Analogamente, se $b \neq 1$, existem r_1, \dots, r_m primos e $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ inteiros positivos tais que $b = r_1^{\gamma_1} \cdots r_m^{\gamma_m}$.

Temos, então, que

$$a/b = q_1^{\beta_1} \cdots q_n^{\beta_n} r_1^{-\gamma_1} \cdots r_m^{-\gamma_m}.$$

Tomando a/b na forma irredutível, temos que a e b não têm fatores em comum, ou seja, não existem índices i, j tais que $q_i = r_j$. Além disso, escrevendo os primos em ordem crescente, temos que a/b pode ser representado de forma única como

$$a/b = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

onde p_1, \dots, p_k são primos com $p_1 < \cdots < p_k$, e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são inteiros não-nulos.

Se $a = 1$, temos $a/b = r_1^{-\gamma_1} \cdots r_m^{-\gamma_m}$ e se $b = 1$, temos $a/b = q_1^{\beta_1} \cdots q_n^{\beta_n}$. Nos dois casos, podemos obter uma única representação para a/b , como anteriormente.

Dado um número racional positivo $x \in \mathbb{Q}_+$, $x \neq 1$, considere sua representação única

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Será útil considerar $x = s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \cdots$ onde s_i é o i -ésimo número primo (de acordo com a enumeração crescente para o conjunto dos números primos) e $\lambda_i = \alpha_j$ se existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $s_i = p_j$ ou $\lambda_i = 0$ caso contrário.

Diremos que $s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \cdots$ é a **fatoração** de x , que é única.

2.1 Resultado principal

Seja $x \in \mathbb{Q}_+$, $x \neq 1$, com fatoração $x = s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \cdots$. Considere a função $f_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f_x(n) = \lambda_n$. Note que f_x é um elemento do produto direto da família $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, onde, para cada $i \in \mathbb{N}$, $Z_i = \mathbb{Z}$ é o \mathbb{Z} -módulo dos inteiros, como no exemplo (1).

Mais precisamente, f_x é um elemento da soma direta S da família $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, pois $f(n) \neq 0$ para apenas uma quantidade finita de $n \in \mathbb{N}$.

Seja $h : \mathbb{Q}_+ \rightarrow S$ a função do \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Q}_+ dos racionais positivos, com a operação de potenciação, na soma direta S , definida por $h(x) = f_x$, para todo $x \in \mathbb{Q}_+$, $x \neq 1$, e $h(1) = 0$.

Teorema 1.2. *A função h é um isomorfismo de \mathbb{Z} -módulos.*

Prova: Primeiro, mostremos que h é um homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos.

Dados $x, y \in \mathbb{Q}_+$, sejam $x = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \cdots$ e $y = s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} \cdots$ as fatorações de x e y , respectivamente. Assim, temos que $xy = s_1^{\alpha_1 + \beta_1} s_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdots$ é a fatoração de xy e, portanto,

$$f_{xy}(n) = \alpha_n + \beta_n = f_x(n) + f_y(n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$h(xy) = f_{xy} = f_x + f_y = h(x) + h(y).$$

Além disso, para todo $z \in \mathbb{Z}$, temos que $x^z = s_1^{z\alpha_1} s_2^{z\alpha_2} \cdots$ é a fatoração de x^z , e portanto

$$f_{x^z}(n) = z\alpha_n = z f_x(n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde segue que

$$h(x^z) = f_{x^z} = z f_x = z h(x).$$

Note que, apesar das diferenças de notação devido às operações dos módulos que estamos lidando, h se encaixa na definição de homomorfismo de módulos.

Provemos agora que h é uma bijeção. Suponha $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tais que $h(x) = h(y)$, ou seja, $f_x = f_y$. Como podemos escrever $x = s_1^{f_x(1)} s_2^{f_x(2)} \dots$ e $y = s_1^{f_y(1)} s_2^{f_y(2)} \dots$, segue claramente da unicidade da fatoração que h é injetora. Por fim, dado f um elemento qualquer de S , como $f(i) \neq 0$ para apenas uma quantidade finita de $i \in \mathbb{N}$, o elemento $c = s_1^{f(1)} s_2^{f(2)} \dots$ está bem definido em \mathbb{Q}_+ e claramente $h(c) = f$. Logo, h é sobrejetora e, portanto, um isomorfismo. \square

Agradecimentos: Agradeço à FAPESP–Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo financiamento, processo 2016/25436-4. Agradeço também ao Prof. Dr. Thiago de Melo pela orientação.

Abstract: Vector spaces, which are studied very early by undergraduate students in mathematics, can be generalized as an algebraic structure known as Module over a ring. Other important objects in mathematics are the set \mathbb{Q} of the rational numbers and the set \mathbb{Z} of the integers. Here, we show how these sets (and different versions of them) have the structure of a module and we use the Fundamental Theorem of Arithmetic to prove that the module \mathbb{Q}_+ of the positive rational numbers can be understood as a direct sum of modules.

Keywords: direct sum; isomorphism; modules

Referências Bibliográficas

- [1] Hu, S.T., *Introduction to Homological Algebra*, HoldenDay, Inc. 1968.

Um Estudo Sobre Problemas e Curvas de Perseguição

Isaac Souza Silva[†]

Orientador(a): Marta Cilene Gadotti

Resumo: Neste trabalho, procura-se analisar o comportamento da solução do problema surgido da perseguição de um rato por um gato, usando a teoria de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Pretende-se ainda comparar tal problema com outro apresentado de forma descontraída e curiosa em livro de Malba Tahan, veja [4], e mostrar, de uma perspectiva histórica e conceitual, os problemas de perseguição, destacando suas aplicações.

Palavras-chave: problemas de perseguição; equações diferenciais ordinárias; modelagem

1 Introdução

“O místico crê num Deus desconhecido. O pensador e o cientista crêem numa ordem desconhecida. É difícil dizer qual deles sobrepuja o outro em sua devoção não-racional.”

(WHYTE apud ALVES, 2000, pg. 39)

A modelagem matemática, utilizada para a resolução de problemas práticos, tem também como objetivo encontrar uma ordem invisível, que poderá ser usada para prever o comportamento dos objetos modelados. O cientista se aproxima, desta forma, do místico ou do jogador: busca entender, sob o prisma de um modelo de realidade imaginado, como determinada situação ocorre e prever o que acontecerá em um determinado futuro. Tal recurso é utilizado por conta das limitações da observação direta, como propõe Rubem Alves, veja [1]: “[...] embora a observação ofereça pistas para sua construção, a imaginação é o artista que dá forma a esta matéria bruta e informe.” (ibid., p. 32)

Desta forma surgiu um dos primeiros problemas de perseguição, proposto por Zenão de Eléia (490–430 a.C.) e conhecido como *Paradoxo da Dicotomia*. O problema consiste em uma corrida entre o herói Aquiles e uma tartaruga, posto que é dada certa vantagem à tartaruga. Segundo Zenão, primeiro Aquiles teria que percorrer metade da distância até a tartaruga, depois metade do que restou e assim sucessivamente, o que significaria que a distância poderia ser dividida em uma soma de infinitos termos.

O problema foi chamado de paradoxo justamente porque o modelo em que se acreditava na época não era suficiente para explicá-lo. Não se concebia que a soma de uma infinidade de

[†]Bolsista PET - SESu MEC

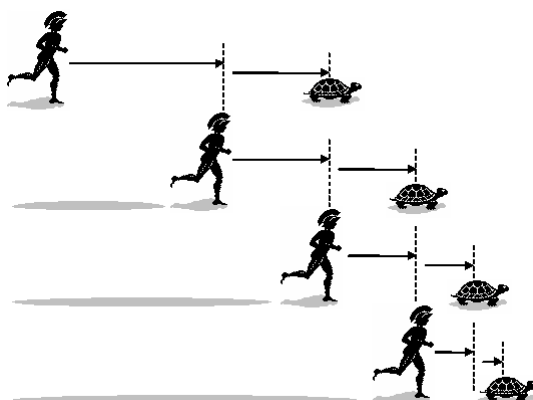


FIGURA 1: Aquiles e a Tartaruga

termos poderia resultar em um número. Com os modelos mais sofisticados de hoje, podemos mostrar que essa soma converge, ou seja, Aquiles alcançará a Tartaruga em algum momento e, provavelmente, ganhará a corrida. Esse problema tem como objetivo uma análise da lógica matemática e não a determinação da curva traçada pelo perseguidor, que é o objetivo das ditas curvas de perseguição.

Definição 1.1. Um problema de perseguição (puro) é definido como sendo a determinação da curva que o perseguidor deve percorrer para alcançar o perseguido que se move ao longo de uma trajetória prescrita, com a condição de que a velocidade do perseguidor aponte sempre para o perseguido.

Os problemas de perseguição que não são puros são chamados de problemas de interceptação, pois não dependem de uma trajetória específica para o perseguidor encontrar o perseguido. Ou seja, o vetor velocidade do perseguidor não precisa sempre apontar para o perseguido. Um problema desse tipo foi proposto por Apolônio de Perga (262–190 a.C.) e sua solução ficou conhecida como o círculo de Apolônio. O problema consiste na perseguição de um navio mercante por um navio pirata, supondo que o navio mercante siga sua trajetória em linha reta. Uma resolução está ilustrada na Figura 2:

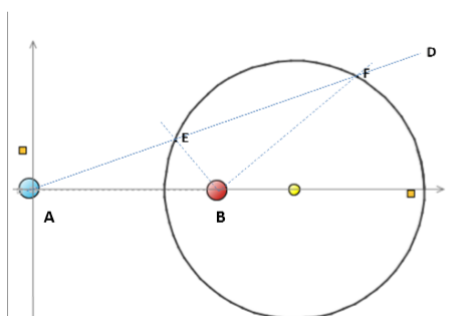


FIGURA 2: O círculo de Apolônio

Supondo que o navio mercante (A) siga a trajetória da reta D , o navio pirata (B) poderá interceptar o navio mercante se direcionado para o ponto E ou F , interseção da reta D com o círculo de Apolônio. Esse problema tem como objetivo apenas descobrir os pontos de interceptação. O matemático francês Pierre Bouguer (1698–1758) propôs uma versão desse mesmo problema, mas no caso da perseguição pura: “o navio mercante navega com velocidade constante em módulo (v_m), direção e sentido, quando de repente é avistado por um navio pirata. O navio pirata navega com velocidade constante em módulo (v_p), mas não em direção e sentido. Façamos a suposição que o navio pirata não ‘tire os olhos do navio mercante’, isto é, a todo momento o vetor velocidade do navio pirata v_p aponta para o navio mercante”.

Neste caso, surgem duas perguntas:

1. Como será a trajetória de perseguição do navio pirata?
2. Em quais condições o navio pirata alcançará o navio mercante?

Através da modelagem matemática do problema poderemos fazer simulações a partir do modelo construído e, posteriormente, verificar se o modelo condiz com o esperado por meio de uma análise qualitativa. Se a realidade confirma as previsões feitas pelo modelo, significa que ele é uma boa aproximação para analisarmos o fenômeno, no caso, da perseguição.

Foi a partir da modelagem dos problemas de perseguição por meio das equações diferenciais ordinárias que George Boole (1815–1864), em seu artigo intitulado “Treatise on differential equation”, definiu o termo “Curvas de Perseguição”.

Mais recentemente, em seu livro “As Maravilhas da Matemática”, Malba Tahan comenta um curioso problema de perseguição encontrado em livro didático da Primeira Série como uma aplicação simples de cálculos aritméticos:

“Um gato persegue um rato; enquanto o rato dá 5 pulos, o gato dá 3, porém, 1 pulo do gato equivale a 2 pulos do rato. O rato leva uma dianteira de 50 pulos dados pelo gato. Quantos pulos deverá o gato dar para alcançar o rato?”

(TAHAN, 1973, pg. 157)

O problema não tem como objetivo a análise da curva descrita pelo gato, mas sim a operacionalização dos cálculos. Além disso, ele ignora a modelagem do problema em si, provocando um distanciamento entre ciência e aluno. O único fator que parece atrair alguma atenção no problema é o fato de ser uma situação presente na vida de qualquer pessoa, uma perseguição entre gato e rato, afinal, a maioria das pessoas já assistiu o famoso desenho “Tom e Jerry”. Embora nem no desenho infantil gato e rato andem aos pulos. O autor comenta tal disparate:

“Eis aí um problema interessante, divertido, mas inteiramente fora da vida real. Até hoje não se encontrou, no mundo em que vivemos, um rato que fugisse aos

pulos, e pulos uniformes, de um gato que andasse, como um louco, aos pulos, também uniformes, atrás dos ratos. E o gato e o rato (mesmo aos pulos) correm atendendo ao princípio mecânico do movimento uniforme. De acordo com o enunciado do problema, o rato, mesmo em perigo de vida, perseguido pelo gato, não deixa de dar pulos iguais em tempos iguais. E assim procedendo, arrisca a pele, para não ferir a precisão matemática do curioso e disparatado problema. O mais tudo está certo. É claro que o estudante terá que dar dois ou três pulos (que não serão possivelmente uniformes) para resolver o problema [...]”

(Id., pg. 157)

Podemos observar que a “modelagem” do problema anterior não corresponde com a realidade, então precisamos encontrar seus erros e aperfeiçoá-la. Primeiramente, a perseguição neste problema não se dá de forma contínua, já que gato e rato correm aos pulos, portanto, não conseguiríamos obter uma curva determinada pelo perseguidor. Adicionando a hipótese de que perseguidor e perseguido se movem de forma contínua e com velocidades determinadas, podemos utilizar a teoria de EDO para estudar o comportamento da curva, respeitando determinadas condições. Pensando dessa forma, resolveremos e analisaremos o seguinte problema:

O rato se encontrava na origem quando um gato localizado no ponto $(a, 0)$ o descobre e parte em sua direção. O rato foge ao longo do eixo- y no sentido positivo, com velocidade constante v . O gato corre sempre em direção ao rato, e com velocidade constante w .

2 Noções preliminares

Para resolver esse problema, utilizaremos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e da Física, bem como a teoria de Equações Diferenciais Ordinárias.

- Teorema Fundamental do Cálculo: Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

- Definição do comprimento de arco de uma curva $(s, y(s))$ em \mathbb{R}^2 :

$$\int_x^a \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds.$$

- Aplicação da fórmula do Movimento Uniforme:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

3 Resolução

Após um tempo t , o gato se encontra no ponto $P = (x, y)$ e o rato no ponto $Q = (0, vt)$. O tempo t que o gato gastou para chegar em P é dado, usando as fórmulas de movimento uniforme ($t = \frac{\Delta S}{w}$) e de comprimento de arco, por:

$$t = \frac{1}{w} \int_x^a \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds.$$

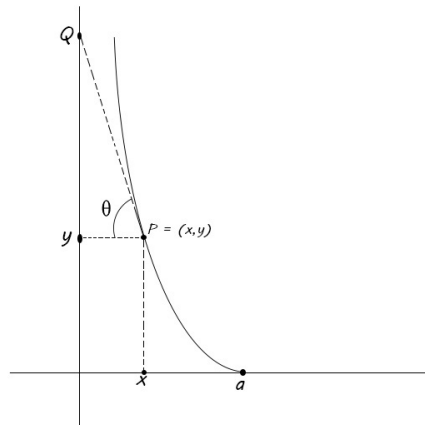


FIGURA 3: Modelando a curva

Consideremos $\overline{OQ} = y_0$, onde $Q = (0, y_0)$ é o ponto de interseção do eixo- y com a curva. Pela geometria da Figura 3 e propriedades da tangente, temos que:

$$\tan \theta = \frac{\overline{OQ} - y(x)}{x} \Rightarrow y(x) - y'(x)x = \overline{OQ}.$$

Mas como $\overline{OQ} = vt$, temos:

$$\frac{v}{w} \int_x^a \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds = y(x) - y'(x)x.$$

Derivando ambos os lados com respeito a x , obtemos:

$$c \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} = xy'', \text{ com } c = \frac{v}{w}.$$

Nota-se que a expressão acima é uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem. Para resolver, vamos tomar $p = y'$, obtendo a equação separável:

$$c \cdot \sqrt{1 + p^2} = xp' \Rightarrow \frac{p'}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{c}{x}.$$

Integrando a expressão, usando $-\ln \sqrt{p^2 + 1} - p$ como primitiva para $\int \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} dp$, temos:

$$-\ln(\sqrt{p^2 + 1} - p) = c \ln x + k_1.$$

Estamos considerando x sempre maior que 0. Usando a condição inicial $p(a) = y'(a) = 0$, obtemos o valor da constante $k_1 = -c \ln a$ e, substituindo, temos:

$$\sqrt{p^2 + 1} - p = \left(\frac{a}{x}\right)^c. \quad (3.1)$$

Invertendo essa equação, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1} - p} = \left(\frac{x}{a}\right)^c. \quad (3.2)$$

Subtraindo (3.1) de (3.2):

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1} - p} - (\sqrt{p^2 + 1} - p) = \left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c.$$

Resolvendo o primeiro membro da equação, obtemos:

$$2p = \left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c \Rightarrow p = y'(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c \right].$$

Integrando ambos os lados em função de x :

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[\int \left(\frac{x}{a}\right)^c dx - \int \left(\frac{a}{x}\right)^c dx \right],$$

será preciso dividir em dois casos:

Para $c = 1$:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2a} - \frac{a}{2} \ln x \right] + k_2.$$

Usando o valor inicial $y(a) = 0$, obtemos $k_2 = -\frac{a}{4} + \frac{a}{2} \ln a$, substituindo na expressão:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2a} - a \ln x \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - a \ln a \right). \quad (3.3)$$

Para $c \neq 1$:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{a}{c+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{a}{c-1} \left(\frac{a}{x}\right)^{c-1} \right] + k_3.$$

Usando a condição inicial $y(a) = 0$, obtemos $k_3 = -\frac{ac}{c^2-1}$, substituindo na expressão, temos:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{a}{c+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{a}{c-1} \left(\frac{a}{x}\right)^{c-1} \right] - \frac{ac}{c^2-1}. \quad (3.4)$$

4 Análise Qualitativa

A curva solução terá diferentes comportamentos dependendo do valor da constante c , então:

Para $c = 1$: Neste caso, as velocidades do gato e do rato são iguais ($v = w$). Temos a expressão (3.3) da curva e queremos saber a coordenada y quando x tende a 0. Analisando o limite, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = +\infty.$$

Ou seja, a perseguição se dará da mesma forma que ocorre no desenho “Tom e Jerry”: o gato nunca alcançará o rato.

Para $c > 1$: Embora analisemos a expressão (3.4), o limite se comporta como no anterior, ou seja, o gato não alcança o rato, o que é condizente com a realidade, pois a velocidade do rato é maior que a do gato ($v > w$).

Para $c < 1$: Neste caso, analisando a solução (3.4), quando $x \rightarrow 0$, $y(x) \rightarrow -\frac{ac}{c^2-1} = \frac{avw}{(w^2-v^2)}$, este é o ponto onde se dará o encontro fatídico entre gato e rato. Isso acontece pela velocidade do gato ser maior que a do rato. O tempo que demorará para que a corrida termine é dado pela física, analisando-se o espaço percorrido e a velocidade do rato:

$$t = \frac{\Delta S}{V_m} = \frac{\frac{avw}{(w^2-v^2)}}{v} = \frac{aw}{(w^2-v^2)}.$$

5 Conclusão

Analisando este modelo do problema de perseguição, podemos ver que ele corresponde às nossas expectativas e com ele podemos prever o comportamento dos objetos estudados. É claro que gato e rato não correrão infinitamente, mas na certa, depois de algum tempo correndo, o gato perceberia se é ou não possível pegar o rato ou, na pior das hipóteses, um deles cansaria de correr. No mais, esse problema serve para motivar o estudo das equações diferenciais ordinárias e da própria modelagem, pois é um exemplo de fácil compreensão, familiar e curioso, além de apresentar muitas aplicações em jogos eletrônicos e outras áreas. Desta forma, as curvas de perseguição são um bom exemplo de como motivar a ciência de forma geral, sobretudo nas escolas, instigando a curiosidade e levando em consideração a vontade de aprender, algo que raramente se vê, como cita Rubem Alves:

“É tolo tentar responder uma questão que você não entende. É triste ter de trabalhar para um fim que você não deseja. Coisas tristes e tolas como estas frequentemente acontecem, dentro e fora da escola, mas o professor deve evitar que ocorram em classe. O estudante deve entender o problema. Mas não basta que ele entenda. É necessário que ele *deseje* sua solução.”

(POLYA apud ALVES, 2000, pg. 35)

Agradecimentos: Agradeço profundamente ao grupo PET por dar sentido em meu caminho pela universidade e à Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti pelo apoio como tutora e orientadora.

Abstract: In this work, we analyze the cat and mouse pursuit problem and your solution behavior, using ordinary differential equations (ODE) theory. We want to compare this problem with another one founding in a Malba Tahan's book and show, in a historical and conceptual perspective, the pursuit problems and your applications.

Keywords: pursuit problems; ordinary differential equations; modeling

Referências Bibliográficas

- [1] Alves, Rubem, *Filosofia da Ciência: Introdução ao Jogo e a Suas Regras*, São Paulo, Edições Loyola, 2000.
- [2] Figueiredo, D.G.; Neves, A.F., *Equações Diferenciais Aplicadas*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997, 44–47.
- [3] Oliveira Júnior, R.L., *Introduzindo problemas e curvas de perseguição no Ensino Médio e universitário*, Rio de Janeiro, Escola SESC de Ensino Médio, Jacarepaguá, 2015.
- [4] Tahan, M., *As Maravilhas da Matemática*, Rio de Janeiro, Bloch Editores, 1973, 157–158.

Modelo de Gompertz e Aplicação

Isabella Dafne Oliveira Rodrigues[†]

Orientador(a): Marta Cilene Gadotti

Resumo: Neste artigo, faremos uso da Equação de Gompertz para estudar o desenvolvimento de tumores sólidos. Inseriremos nessa equação um fator que representa a ação de um determinado tratamento que tem por finalidade estabilizar o crescimento ou diminuir o volume de massa tumoral. Esse estudo foi realizado sob a metodologia de análise de equações diferenciais ordinárias lineares.

Palavras-chave: Tumores; Equação de Gompertz; Equações Diferenciais Ordinárias

1 Introdução

Pretendemos motivar o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias, analisando o crescimento de tumores sólidos. Para isto, o estudo de um problema de valor inicial construído por uma equação diferencial ordinária e uma condição inicial, nos fornecerá a solução a qual descreverá a população de células tumorais no instante t .

Examinaremos a inserção de um fator de tratamento, ou seja, levaremos em consideração técnicas de tratamento, como quimioterapia ou medicação específica, baseando-se na referência [2]. Em seguida, queremos que esse fator de tratamento seja tal que, em sua ausência tenhamos conhecida a Equação de Gompertz. Por fim, veremos os resultados obtidos através de simulações, após considerarmos ou não o tratamento.

2 A dinâmica do crescimento de um tumor

Observou-se experimentalmente que células de divisão de “crescimento livre”, tais como as células de bactérias, crescem numa razão proporcional ao volume das células de divisão neste instante. Seja $V(t)$ o volume das células de divisão no instante t . Então

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V, \quad (2.1)$$

para alguma constante positiva λ . A solução de (2.1) é

$$V(t) = V_0 e^{\lambda(t-t_0)} \quad (2.2)$$

onde V_0 é o volume das células de divisão no instante inicial t_0 . Portanto, as células de divisão de crescimento livre crescem *exponencialmente* com o tempo. Uma consequência importante de (2.2) é que o volume das células dobra em todo intervalo de tempo de duração $\ln \frac{2}{\lambda}$. Por outro lado, tumores sólidos não crescem exponencialmente com o tempo. Quando o tumor se torna maior, o tempo de duplicação do volume total do tumor cresce continuamente. Pesquisadores mostraram que os dados para muitos tumores ajustam-se notavelmente bem, pela equação

$$V(t) = V_0 \exp \left(\frac{\lambda}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha t)) \right) \quad (2.3)$$

[†]Bolsista PET-SESu/MEC

onde λ e α são constantes positivas.

Geralmente nos referimos a equação (2.3) como uma relação “gompertziana”. Diz que o tumor cresce cada vez mais lentamente com a passagem do tempo, e que finalmente tende ao volume limite $V_0 e^{\frac{\lambda}{\alpha}}$.

3 Análise da Equação de Gompertz

Com o intuito de descrever o crescimento de tumores sólidos, o matemático Benjamin Gompertz, em 1938, desenvolveu uma equação, muito conhecida e denominada Equação de Gompertz. Vejamos-a:

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln \left(\frac{K}{N} \right) \tag{3.1}$$

- $N(t)$ representa a população de células tumorais no instante t .
- r é a constante intrínseca das células, com $r > 0$.
- K é a capacidade de carga do tumor, ou seja, é o tamanho máximo que o mesmo pode atingir com os nutrientes disponíveis, logo, $K > 0$.

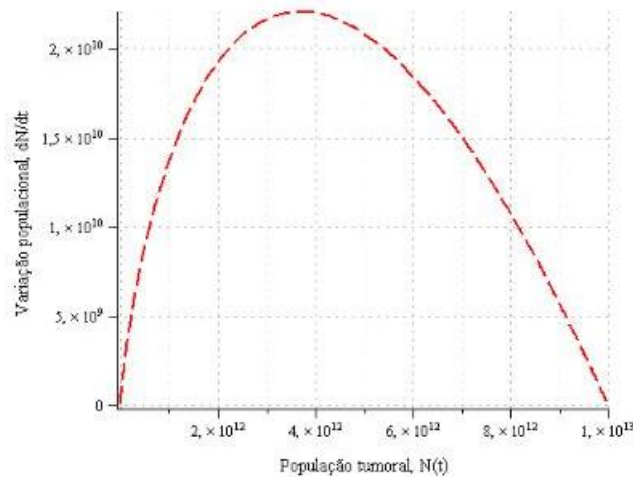


FIGURA 1: Gráfico $N \times \frac{dN}{dt}$

Considerando que conhecemos a população de células tumorais no instante inicial, ou seja, temos a condição inicial $N(0) = n_0$ e que $\ln \frac{N}{K} = v$, assim, é possível resolver o P.V.I:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \ln \left(\frac{K}{N} \right) \\ N(0) = n_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

A resolução do P.V.I acima nos fornece como solução a função do tempo que descreve a população de células tumorais no instante t , dada por:

$$N(t) = K \exp \left(- \exp \left(rt \ln \frac{n_0}{K} \right) \right), \quad 0 < \frac{n_0}{K} < 1. \tag{3.3}$$

Com o desenvolvimento da angiogênese^{††}, a população $N(t)$ tende a aumentar cada vez mais, com

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K,$$

e além disso, verifica-se de maneira relativamente simples que o único ponto crítico, que é máximo global para a Equação de Gompertz é

$$N = \frac{K}{e},$$

e que seu valor máximo é alcançado em

$$V_{\max} = r \frac{K}{e}.$$

Extraímos os seguintes valores para os parâmetros da Equação de Gompertz:

r	K	$N(0)$
0.0060	10^{13}	10^9

TABELA 1: Parâmetros para a construção da curva de Gompertz

Se alterações forem feitas no valor de n_0 , obtemos o seguinte comportamento das populações celulares tumorais:

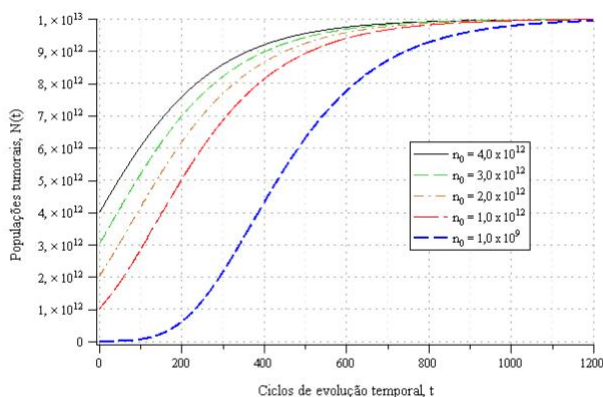


FIGURA 2: Comportamento da solução da Equação de Gompertz, quando variamos a condição inicial.

Vemos então, que populações abaixo da capacidade de carga tendem para K à medida que os ciclos de evolução temporal, t , aumentam. Isso significa que, se a população de células tumorais estiver abaixo do valor K , ela tende a crescer em direção a esse valor. Se considerarmos, que por algum motivo a população de células tumorais ultrapassou o valor que definimos para a capacidade de carga, ela também tenderá a esse valor, ou seja, como K é o valor máximo que o tumor pode atingir, se por algum motivo $N(t) > K$, tem-se que, com o passar do tempo, $N(t) \rightarrow K$. Dessa forma, podemos admitir que K é a solução de equilíbrio da equação (3.1).

Observação 1.1. Estamos analisando o crescimento do tecido tumoral sem considerarmos fatores de tratamento. Logo é de se esperar que com a inserção de um tratamento a taxa de crescimento diminua.

^{††}Angiogênese é o termo usado para descrever o mecanismo de crescimento de novos vasos sanguíneos a partir dos já existentes.

4 Inserção de um fator de tratamento

Queremos que esse fator seja tal que, na sua ausência tenhamos a própria Equação de Gompertz (3.1) e que, com a sua atuação, ele funcione como retardador do crescimento da população de células tumorais, $N(t)$. Utilizaremos nesse trabalho, a aplicação de uma droga chamada *endostatina*. A endostatina é uma proteína natural que bloqueia a formação de vasos sanguíneos. No caso do câncer, por exemplo, acaba interrompendo a irrigação do tumor bloqueando o fornecimento de nutrientes e destruindo as células tumorais.

Consideremos que a inibição do crescimento das células tumorais depende da “força” de atuação do medicamento, γ , da sua concentração no organismo no instante t , $c(t)$, e da quantidade de células tumorais a cada instante, $N(t)$. Consideremos, então, a seguinte equação

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln \frac{K}{N} - \gamma c(t)N, \tag{4.1}$$

em que a concentração, $c(t)$, do medicamento a cada instante, t , é dada pela equação

$$c(t) = c_0 S t e^{-rt}$$

e S é a função definida como:

$$S = \begin{cases} 1, & \text{considerando o tratamento,} \\ 0, & \text{sem considerar o tratamento.} \end{cases}$$

Com base na modelagem matemática da inserção do fator de tratamento e com os parâmetros específicos que utilizamos vamos, encontrar alguns resultados.

Com base nas equações e valores de parâmetros descritos na tabela (1) e considerando $c_0 = 0,04$ e $\gamma = 0,04$, foi possível efetuar as simulações da população de células tumorais *versus* variação populacional, sem e com a consideração do fator de tratamento para que pudéssemos fazer a comparação da evolução populacional.

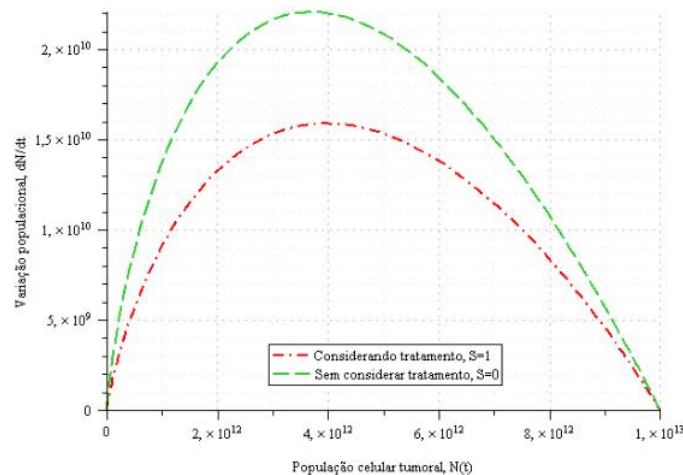


FIGURA 3: Comparação entre as curvas que representam a população de células tumorais versus variação populacional, sem e com a consideração do tratamento.

Verifica-se na Figura 3 que, com a inserção do fator de tratamento, a taxa de variação da população de células tumorais é fortemente reduzida. Esse resultado nos indica que com a inserção de um tratamento baseado em endostatina, o crescimento da população de células

tumorais será retardado em comparação ao seu crescimento sem o tratamento, o que nos permite intuir que, considerando o tratamento, essa população demorará muito mais a atingir esse limiar.

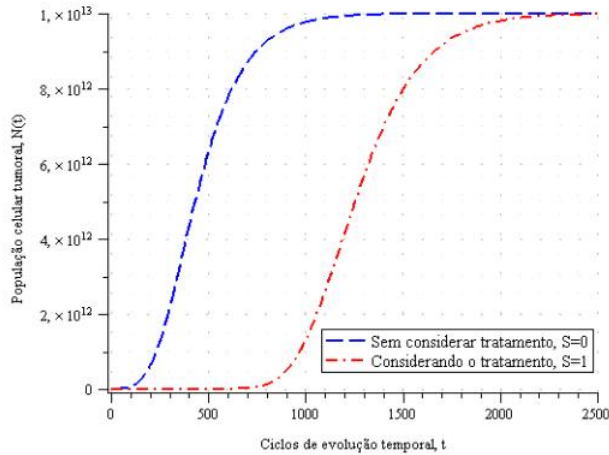


FIGURA 4: Comparação entre as curvas que representam a população de células tumorais com o passar do tempo, $t \times N$, sem e com a consideração do tratamento.

Além disso, podemos observar na Figura 4 que, no caso no qual se considera a inserção do tratamento, $S = 1$, a população de células tumorais, $N(t)$, cresce bem mais lentamente do que o caso em que esse tratamento não é considerado, $S = 0$, até o ciclo de evolução temporal de número aproximado $t = 1000$. A partir de então, suas inclinações se aproximam cada vez mais, indicando que essas populações tendem a se encontrar, o que de fato acontece.

Portanto, um tratamento com esses moldes representaria um ganho de tempo e de qualidade de vida ao paciente, já que com esses resultados, foi possível observar claramente que o tratamento impede o crescimento acelerado da população de células do tumor por quase metade do tempo que gastaria até alcançar a capacidade de carga K .

5 Considerações Finais

Através desse estudo, podemos entender um pouco melhor a Equação de Gompertz, além disso, conseguimos inserir na Equação de Gompertz um fator que representa a ação de um determinado medicamento e simular o comportamento da massa tumoral após esse tratamento administrado.

Agradecimentos: Agradeço primeiramente a Deus, por cada dia nos dar uma nova chance. Aos meus pais, irmãos e ao Matheus por sempre me apoiarem nas decisões a serem tomadas. Ao PET pela colaboração financeira e pelo incentivo à pesquisa. A Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti pela supervisão na iniciação científica e apoio nos momentos difíceis.

Abstract: In this paper, we will use the Gompertz's Equation to study the development of solid tumors. We insert in this equation a factor that represents the action of a certain treatment that aims to stabilize the growth or decrease the volume of tumor mass. This search was realized under the methodology of linear ordinary equations analyses.

Keywords: Tumors; Gompertz's Equation; Ordinary differential equations

Referências Bibliográficas

- [1] Braun, M., *Equações Diferenciais e suas aplicações*. Rio de Janeiro Campus LTDA.
- [2] Domingues, J., *Análise do Modelo de Gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento*. *Biomatemática* 21 (2011), 103–112.

Modelo de Dinâmica Populacional com Estratégias de Retirada

Laís Zorzo Buzo[†] e Luis Renato de Campos Damin e Mateus Spadotto
Orientador(a): Renata Zotin Gomes de Oliveira

Resumo: Neste trabalho apresentamos alguns modelos de dinâmica populacional que consideram um crescimento logístico, mas com diferentes estratégias de retirada de indivíduos. Esses modelos são analisados quanto ao número de pontos de equilíbrio existentes e às respectivas estabilidades, onde observa-se possibilidade de bifurcação, em função dos parâmetros presentes no modelo.

Palavras-chave: Modelo logístico; bifurcação; ponto de equilíbrio; estabilidade.

1 Introdução

Um dos primeiros estudos de dinâmica de populações foi o trabalho de Thomas R. Malthus, publicado em 1798. O modelo proposto por ele, dado por

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP, \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

previa um crescimento populacional segundo uma progressão geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresceriam de maneira aritmética. A equação (1.1) tem como solução $P(t) = P_0 e^{rt}$ e mostrou-se adequada para algumas populações de micro-organismos, em curtos períodos de tempo.

Estudos sobre dinâmica de populações possuem grande importância, pois através destes é possível fazer previsões sobre seu crescimento, planejar corretamente o uso de recursos públicos, planejar urbanização, dentre [1].

Uma modificação do modelo de Malthus foi proposta por Verhulst, levando em conta fatores inibidores e é conhecido também como modelo logístico. Em termos de equações diferenciais, é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = rN \left(\frac{K - N}{K} \right), \quad (1.2)$$

onde N população no instante t , $r > 0$ é a taxa de crescimento e o parâmetro $K > 0$ é chamado capacidade suporte do meio.

Nesse trabalho temos por objetivo analisar um modelo para uma população que possui um crescimento logístico mas que sofre uma retirada de indivíduos (um modelo de pesca, por exemplo).

Apresentamos a seguir alguns conceitos e resultados preliminares necessários para a análise dos modelos que serão apresentados. Os gráficos apresentados no texto foram realizados com o *software* Geogebra.

[†]PET - MEC/Sesu

2 Conceitos preliminares

Os conceitos aqui apresentados são baseados em [3].

Definição 1.1. Considere uma equação diferencial do tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{2.1}$$

onde f é uma função de classe C^1 . Dizemos que $x^* \in D_f$ é ponto de equilíbrio (ou ponto fixo) de (2.1) se for solução da equação $f(x) = 0$.

Pontos de equilíbrio são soluções constantes da equação diferencial.

Exemplo 1.2. Considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x).$$

Neste caso, $f(x) = x(1 - x)$ e assim, os pontos de equilíbrio são $x^* = 0$ e $x^* = 1$.

Definição 1.3. Um ponto de equilíbrio x^* da equação (2.1) é dito estável se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta(\epsilon) > 0$ tal que, para $|x_0 - x^*| < \delta$, a solução $\varphi(t, x_0)$ da equação (2.1) que passa por x_0 em $t = 0$ satisfaz a inequação $|\varphi(t, x_0) - x^*| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. O ponto de equilíbrio x^* é dito instável se não é estável.

Definição 1.4. Um ponto de equilíbrio x^* é dito assintoticamente estável se é estável e se existe um $r > 0$ tal que $|\varphi(t, x_0) - x^*| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo x_0 satisfazendo $|x_0 - x^*| < r$.

Um resultado importante na obtenção de um critério para análise de estabilidade de pontos de equilíbrio a partir da função f é apresentado a seguir.

Lema 1.5. *Um ponto de equilíbrio x^* de (2.1) é estável se existe um $\delta > 0$ tal que $(x - x^*)f(x) \leq 0$ para $|x - x^*| < \delta$. Analogamente, x^* é assintoticamente estável se e somente se existe $\delta > 0$ tal que $(x - x^*)f(x) < 0$ para $0 < |x - x^*| < \delta$. Um ponto de equilíbrio x^* de (2.1) é instável se existe $\delta > 0$ tal que $(x - x^*)f(x) > 0$ para $0 < x - x^* < \delta$ ou $-\delta < x - x^* < 0$.*

Usando o lema anterior, é possível obter o seguinte resultado:

Teorema 1.6. *Seja x^* um ponto de equilíbrio de (2.1). Se $f'(x^*) > 0$, x^* é instável e se $f'(x^*) < 0$, o ponto de equilíbrio x^* é assintoticamente estável.*

A demonstração tanto do lema como do teorema pode ser encontrada em [3].

Quando $f'(x^*) = 0$ nada pode-se afirmar de imediato e uma análise mais detalhada é necessária.

Exemplo 1.7. No exemplo dado anteriormente, onde $\frac{dx}{dt} = x(1 - x)$, temos $f(x) = x(1 - x)$ e como pontos de equilíbrio $x^* = 0$ e $x^* = 1$.

Calculando a derivada de f , temos $f'(x^*) = 1 - 2x^*$ e assim temos $f'(0) = 1 > 0$. Portanto, $x^* = 0$ é instável. No entanto, $f'(1) = -1 < 0$ e assim, $x^* = 1$ é assintoticamente estável.

3 O modelo de Verhulst

Também conhecido como modelo logístico, o modelo de Verhulst incorpora fatores inibidores e é dado pela equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad (3.1)$$

onde $r > 0$ é a taxa de crescimento, N população no instante t e K é chamado de capacidade suporte do meio. A solução para a equação (3.1), considerando $N(0) = N_0$, é dada por:

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + [K - N_0]e^{-rt}}. \quad (3.2)$$

Para esse modelo temos dois pontos de equilíbrio: $N = 0$ e $N = K$. O ponto $N = 0$ é instável, ou seja, uma pequena perturbação no sistema fará com que a população cresça. O ponto $N = K$ é assintoticamente estável, ou seja, a população tende a se estabilizar em torno do valor da capacidade suporte do meio.

Uma observação importante é que o modelo de Verhulst não apresenta bifurcações, ou seja, o número de pontos de equilíbrio bem como a estabilidade/instabilidade dos mesmos não mudam à medida que os parâmetros variam.

4 Modelos com estratégias de retirada

Um população que possui um crescimento logístico mas sofre uma retirada de indivíduos (caça, pesca, etc) pode ser modelada pela equação

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - P(N),$$

onde o termo $P(N)$ representa os efeitos da retirada, que nesse caso depende somente da população. Neste trabalho consideraremos dois tipos de estratégia de retirada: uma constante e outra dependente da própria população.

4.1 Modelo com retirada constante

Neste caso consideramos $P(N)$ constante, ou seja, $P(N) = H$, onde $H > 0$. Assim, temos o seguinte modelo:

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - H. \quad (4.1)$$

A equação (4.1) pode ser reescrita numa forma adimensional tomando $x = \frac{N}{K}$. Como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dN}{dt},$$

temos

$$K \frac{dx}{dt} = rKx(1 - x) - H.$$

Tomando $\tau = rt$, temos que $\frac{d\tau}{dt} = r$. Como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt},$$

a equação (4.1) se torna

$$Kr \frac{dx}{d\tau} = Krx(1 - x) - H.$$

Dividindo por Kr e denotando por $h = \frac{H}{Kr}$ obtemos o modelo na forma adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1 - x) - h.$$

Sabemos que os pontos de equilíbrio desse sistema ocorrem quando $f(x) = 0$, ou seja, $f(x) = x(1 - x) - h = 0$. Assim,

$$x(1 - x) - h = 0 \Rightarrow x^2 - x + h = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4h}}{2}.$$

Portanto, se $1 - 4h > 0$, ou seja, $h < \frac{1}{4}$, teremos dois pontos de equilíbrio: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2}$ e $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4h}}{2}$. Se $h > \frac{1}{4}$ não há ponto de equilíbrio e se $h = \frac{1}{4}$ temos como único equilíbrio $x^* = 1/2$.

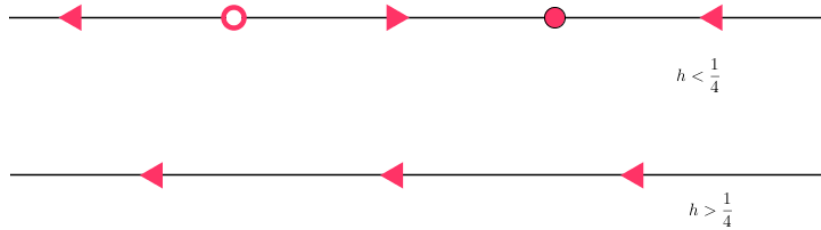


FIGURA 1: Número de pontos de equilíbrio, dependendo de h .

Na Figura 1, se $h < \frac{1}{4}$, as setas indicam que x_1 é instável e x_2 é assintoticamente estável. Isso pode ser confirmado através do cálculo da derivada, ou seja, $f'(x_1) = \sqrt{1 - 4h} > 0$ e $f'(x_2) = -\sqrt{1 - 4h} < 0$. Se $h > \frac{1}{4}$, não há equilíbrio.

Podemos observar também os pontos de equilíbrio, que são soluções de $x(1 - x) - h = 0$, analisando graficamente as funções $y_1 = x(1 - x)$ e $y_2 = h$ (ver Figura 2).

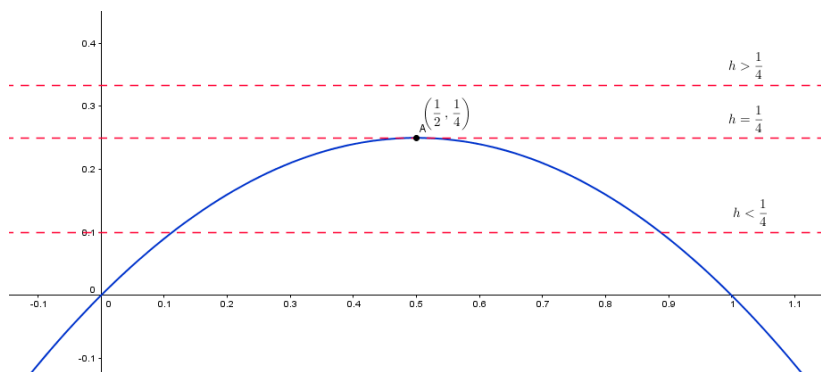


FIGURA 2: Gráfico de $y_1 = x(1 - x)$ e $y_2 = h$, para diferentes valores de h .

Novamente podemos observar que existem dois pontos de equilíbrio quando $h < \frac{1}{4}$ e nenhum quando $h > \frac{1}{4}$. No valor crítico $h = \frac{1}{4}$ temos uma bifurcação sela-nó.

A situação onde $h < \frac{1}{4}$ ocorre indica que, no caso de uma população de peixes, a retirada é moderada. Se inicialmente a população de peixes é muito pequena ($x(0) = x_0 < x_1$) não restarão peixes, devido às retiradas. Se $x_0 > x_1$, a população irá se estabilizar em x_2 , ou seja, peixes e pescadores vivem em harmonia.

Se $h = \frac{1}{4}$, como $f(x) < 0$ para $x \neq \frac{1}{2}$, se $x_0 < x^*$, a população será extinta e se $x_0 > x^*$, a população tende a se estabilizar em x^* . Portanto, x^* é instável (alguns autores denominam esse caso de semi-estável [2]). O caso $h > \frac{1}{4}$ indica que a população irá se extinguir pois não há pontos de equilíbrio. Assim, nesse modelo existe a possibilidade da população se tornar negativa, o que indica que esse modelo precisa ser reformulado. Um modelo melhor deveria ter $x^* = 0$ como ponto de equilíbrio para qualquer valor de H ([2]).

4.2 Modelo com retirada não constante

Um modelo mais realista do que foi apresentado na seção anterior é dado por

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - H \frac{N}{A + N}, \quad N(0) = N_0, \quad (4.2)$$

onde K é uma constante chamada capacidade suporte da população, r é a taxa de crescimento e A é um nível crítico da população. O termo $-H \frac{N}{A + N}$ expressa a retirada de indivíduos, que decresce com N .

Esse modelo apresenta quatro parâmetros, o que torna mais complexa a análise de pontos de equilíbrio e estabilidade. De modo análogo ao modelo anterior, através de uma mudança de variável, obteremos um modelo na forma adimensional, com redução do número de parâmetros.

Tomando $x = \frac{N}{K}$ temos $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dN}{dt}$. Assim, a equação (4.2) pode ser reescrita como

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x) - \frac{H}{K} \frac{x}{\left(\frac{A}{K} + x\right)}. \quad (4.3)$$

Fazendo $\tau = rt$ e lembrando que $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$, temos $\frac{dx}{dt} = r \frac{dx}{d\tau}$. Assim, a equação (4.3) é escrita como

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1 - x) - \frac{H}{Kr} \frac{x}{\left(\frac{A}{K} + x\right)}.$$

Finalmente, denotando por $h = \frac{H}{Kr}$ e $a = \frac{A}{K}$, obtemos

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1 - x) - h \frac{x}{a + x}. \quad (4.4)$$

A equação (4.4) envolve somente os parâmetros a e h , o que torna a sua análise um pouco mais simples.

De (4.4) temos $f(x) = x(1 - x) - \frac{hx}{a + x}$ e portanto os equilíbrios são soluções de

$$\begin{aligned} x(1 - x) - \frac{hx}{a + x} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{ax + x^2 - ax^2 - x^3 - hx}{a + x} &= 0 \Leftrightarrow \\ x(-x^2 + (1 - a)x + (a - h)) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Da equação (4.5) temos que $x^* = 0$ é ponto de equilíbrio para quaisquer valores de a ou h . Os outros pontos de equilíbrio são soluções de

$$x^2 - (1 - a)x - (a - h) = 0. \quad (4.6)$$

Resolvendo (4.6) tem-se que as possíveis soluções são da forma

$$x_1 = \frac{(1 - a) + \sqrt{(1 - a)^2 + 4(a - h)}}{2}, \quad x_2 = \frac{(1 - a) - \sqrt{(1 - a)^2 + 4(a - h)}}{2}. \quad (4.7)$$

Analisaremos alguns casos pois, do ponto de vista biológico, x_1 e x_2 devem ser reais e positivos. É importante observar que, como $A < K$, temos $0 < a < 1$.

Caso I: $(1 - a)^2 + 4(a - h) < 0$, ou seja, $h > \frac{(1 + a)^2}{4}$.

Neste caso temos $h > a$ e a equação (4.4) não possui pontos de equilíbrio não triviais. Assim, o único ponto de equilíbrio é $x^* = 0$. Como

$$f'(x) = 1 - 2x - \frac{ha}{(a + x)^2}, \quad (4.8)$$

temos $f'(0) = 1 - \frac{h}{a}$. Como $h > a$ temos $f'(0) < 0$ e portanto, $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Caso II: $(1 - a)^2 + 4(a - h) = 0$, ou seja, $h = \frac{(1 + a)^2}{4}$.

Neste caso temos também $a < h$. Os pontos de equilíbrio são: $x^* = 0$ e $x_1^* = \frac{1 - a}{2}$.

Como $0 < a < 1$, temos $x_1^* > 0$. Analisando a derivada, como $a < h$, $x^* = 0$ continua sendo assintoticamente estável.

$$f'(x_1^*) = 1 - 2x_1^* - \frac{ha}{(a + x_1^*)^2} = a \left(1 - \frac{h}{\frac{(a+1)^2}{4}} \right) = 0.$$

Como $f''(x) = -2 + 2\frac{ah}{(a + x)^3}$ e $h = \frac{(1 + a)^2}{4}$ temos

$$f''(x_1^*) = -2 + 16\frac{ah}{(a + 1)^3} = 2\frac{a - 1}{a + 1} < 0.$$

Assim, temos que x_1^* é um ponto de máximo de $f(x)$ e x_1^* é instável (mais especificamente, semi-estável).

- Para uma condição inicial maior que x_1^* , a população tende a se aproximar de x_1^* .
- Para uma condição inicial menor que x_1^* , a população tende a se afastar de x_1^* e se aproximar de $x^* = 0$.

Caso III: $(1 - a)^2 + 4(a - h) > 0$ ou $h < \frac{(1 + a)^2}{4}$.

Para este caso, temos como pontos de equilíbrio $x^* = 0$ e x_1 e x_2 dados por (4.7). Observamos que x_1 é sempre positivo. No entanto, x_2 só existe do ponto de vista biológico se e somente se $h > a$. Assim, analisaremos três casos: $h > a$, $h = a$ e $h < a$.

($h > a$): O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ continua sendo assintoticamente estável. Para x_1 , denotando $\Delta = (1 - a)^2 + 4(a - h) = (1 + a)^2 - 4h$, temos

$$f'(x_1) = 1 - 2x_1 - \frac{ha}{(a + x_1)^2} = a - \sqrt{\Delta} - \frac{4ah}{(a + 1 + \sqrt{\Delta})^2}. \quad (4.9)$$

Para a análise do sinal de $f'(x_1)$ são necessárias as seguintes igualdades e desigualdades:

$$\Delta = (1 + a)^2 - 4h \Rightarrow \Delta + 4h = (1 + a)^2, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} &= \sqrt{(1 - a)^2 + 4(a - h)} < \sqrt{(1 - a)^2} \\ \sqrt{\Delta} &< (1 - a) \Rightarrow \\ a &< 1 - \sqrt{\Delta}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

pois $0 < a < 1$.

$$\begin{aligned} (a + 1 + \sqrt{\Delta})^2 &= (a + 1)^2 + 2(a + 1)\sqrt{\Delta} + (\sqrt{\Delta})^2 \\ &= \Delta + 4h + 2(a + 1)\sqrt{\Delta} + (\sqrt{\Delta})^2 \\ &< \Delta + 4h + 2(1 - \sqrt{\Delta} + 1)\sqrt{\Delta} + \Delta \\ &= 2\Delta + 4h + 2\sqrt{\Delta}(2 - \sqrt{\Delta}) \\ &= 2\Delta + 4h + 4\sqrt{\Delta} - 2\Delta \\ &= 4h + 4\sqrt{\Delta} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como $(a + 1 + \sqrt{\Delta})^2 < 4h + 4\sqrt{\Delta}$ segue que

$$\frac{1}{4h + 4\sqrt{\Delta}} < \frac{1}{(a + 1 + \sqrt{\Delta})^2},$$

e portanto,

$$\frac{-4ah}{(a + 1 + \sqrt{\Delta})^2} < \frac{-4ah}{4h + 4\sqrt{\Delta}} = \frac{-ah}{h + \sqrt{\Delta}}.$$

Voltando em (4.9), de $f'(x_1)$ temos

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= a - \sqrt{\Delta} - \frac{4ah}{(a + 1 + \sqrt{\Delta})^2} \\ &< a - \sqrt{\Delta} - \frac{ah}{h + \sqrt{\Delta}} \\ &= \frac{(a - \sqrt{\Delta})(h + \sqrt{\Delta}) - ah}{h + \sqrt{\Delta}} \\ &= \frac{ah + a\sqrt{\Delta} - h\sqrt{\Delta} - \Delta - ah}{h + \sqrt{\Delta}} \\ &= \frac{(a - h)\sqrt{\Delta} - \Delta}{h + \sqrt{\Delta}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como $h > a$ temos $f'(x_1) < 0$ e portanto, x_1 é assintoticamente estável.

Neste caso, como o ponto de equilíbrio x_2 também existe, é importante ressaltar que a equação

$$x_2(1 - x_2) = \frac{hx_2}{a + x_2}$$

é satisfeita e assim,

$$1 - x_2 = \frac{h}{a + x_2}, \quad 0 < x_2 < 1. \quad (4.14)$$

Da expressão de $f'(x_2)$ temos

$$\begin{aligned}
 f'(x_2) &= 1 - 2x_2 - \frac{ah}{(a+x_2)^2} \\
 &= 1 - 2x_2 - \frac{h}{(a+x_2)} \frac{a}{(a+x_2)} \\
 &= 1 - 2x_2 - \frac{(1-x_2)a}{a+x_2} \\
 &= \frac{(1-2x_2)(a+x_2) - a + ax_2}{a+x_2} \\
 &= \frac{x_2\sqrt{\Delta}}{a+x_2} > 0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Assim, x_2 é instável.

($h = a$): Obtemos que $f'(0) = 1 - \frac{h}{a} = 0$. Analisando $f''(x)$, como $h = a$ e $0 < a < 1$, temos

$$f''(0) = -2 + 2\frac{h}{a^2} = 2\left(\frac{1}{a} - 1\right) > 0.$$

Como $f''(0) > 0$, temos $x^* = 0$ é um ponto de mínimo local de $f(x)$. Assim, $x^* = 0$ é semi-estável, ou seja, dada uma condição inicial maior que $x^* = 0$ e menor que x_1 , a população se afasta de $x^* = 0$.

Para $x_1^* = 1 - a$ temos

$$f'(x_1^*) = 1 - 2(1-a) - \frac{ah}{(a+1-a)^2} = -1 + 2a - ah = -1 + 2a - a^2 = -(a-1)^2 < 0$$

e portanto x_1^* é assintoticamente estável.

($h < a$): Temos nesse caso $f'(0) = 1 - \frac{h}{a} > 0$ e portanto $x^* = 0$ é instável. Como já dissemos anteriormente, neste caso x_2 não existe do ponto de vista biológico. Análogo ao caso anterior, como x_1 é ponto de equilíbrio, a equação

$$x_1(1-x_1) = \frac{hx_1}{a+x_1}, \quad 0 < x_1 < 1$$

é satisfeita e assim,

$$1 - x_1 = \frac{h}{a+x_1}. \tag{4.16}$$

Consequentemente, temos

$$\frac{-a(1-x_1)^2}{h} = \frac{-ah}{(a+x_1)^2}. \tag{4.17}$$

Além disso, como $h < a$, temos

$$\frac{-a(1-x_1)^2}{h} < -(1-x_1)^2.$$

Da expressão de $f'(x_1)$ temos:

$$\begin{aligned}
 f'(x_1) &= 1 - 2x_1 - \frac{ah}{(a+x_1)^2} \\
 &= 1 - 2x_1 - \frac{a(1-x_1)^2}{h} \\
 &< 1 - 2x_1 - (1-x_1)^2 = -x_1^2 < 0
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Como $f'(x_1) < 0$, x_1 é assintoticamente estável.

É importante observarmos que ocorrem bifurcações para $h = a$ e $h = \frac{(1+a)^2}{4}$.

5 Conclusão

Nos dois modelos com estratégia de retirada vimos a possibilidade da população ser extinta. No entanto, o segundo modelo apresentado (a estratégia de retirada depende da população) é mais realista, tendo em vista que o equilíbrio nulo sempre existe, independentemente dos parâmetros. Além disso, existe a possibilidade de existência de três pontos de equilíbrio, o que não acontece com estratégia de retirada constante.

Agradecimentos: Agradecemos à Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso pela colaboração nos resultados do Caso III.

Abstract: In this work we present some models of population dynamics that consider logistic growth, but with different strategies of withdrawing individuals. These models are analysed for the number of equilibrium points and their respective stabilities, where bifurcation is possible, as a function of the parameters present in the model.

Keywords: Logistic model; bifurcation; equilibrium point; stability.

Referências Bibliográficas

- [1] Djairo G. Figueiredo, *Equações diferenciais aplicadas*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [2] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Pub, 1994.
- [3] Hale, J.; Koçak, H.; *Dynamics and Bifurcations* - Springer-Verlag, 2012.

BOLETIM DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM MATEMÁTICA · BICMAT

Orientação aos autores

Ao redigir o material a ser divulgado o autor deve observar que o alvo principal é o aluno de graduação, devendo a redação ser clara e objetiva incentivando-o à leitura.

O trabalho deve ser enviado à Comissão Editorial, via e-mail, na linguagem \LaTeX , usando a classe `bicmat`. Mais informações sobre a formatação do trabalho podem ser encontradas em www.rc.unesp.br/igce/matematica/bicmat, assim como o endereço para o envio do trabalho.

A responsabilidade de cada artigo é exclusiva do autor e respectivo orientador.